Academia Sabatina de Jóvenes Talento - Nicaragua 2020

Conjugados isogonales y simedianas

Jafet Baca

1. Conjugados isogonales

Consideremos un triángulo ABC. Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son *conjugadas isogonales* del $\triangle ABC$ si ambas pasan por el mismo vértice del triángulo y una es la reflexión de la otra respecto a la bisectriz interna de $\triangle ABC$; esto es, que formen ángulos iguales con los lados del triángulo que contienen ese vértice.

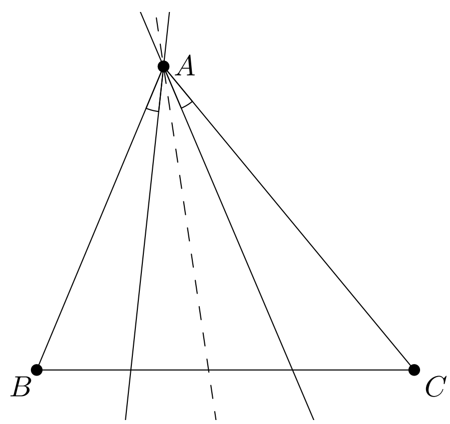


Figura 1: Un par de conjugadas isogonales de $\triangle ABC$.

En la segunda sección del documento hablaremos acerca de un par particular de conjugadas isogonales: la mediana y la simediana. La última contiene propiedades interesantes y útiles que valen la pena estudiar. Otro ejemplo común de rectas isogonales son las alturas de $\triangle ABC$ y los diámetros que contienen sus vértices.

Por el teorema de Ceva en su versión trigonométrica, cuando tres cevianas concurren, sus respectivas conjugadas isogonales también lo harán. El punto de concurrencia es el *conjugado o punto isogonal* del punto de concurrencia de nuestras rectas originales. Por ejemplo, el ortocentro es el isogonal del ortocentro y viceversa. Por supuesto, el incentro es su propio conjugado isogonal. Dos puntos isogonales menos obvios son el punto de Nagel de $\triangle ABC$ y el insimilicentro del incírculo y el circuncírculo del mismo triángulo (esto no es tan sencillo de probar).

En lo que sigue de este apartado, centraremos nuestra atención a tres propiedades cruciales para la resolución de problemas.

Teorema 1 (Steiner)**.**

Sean D y E dos puntos sobre el segmento BC del triángulo ABC tal que $\angle BAE = \angle DAC$. Así

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BE}{CE} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Prueba. Dos aplicaciones del teorema de la bisectriz generalizado son más que suficiente. □

El siguiente resultado es menos simple.

Lema 1 (Triángulos pedales de conjugados isogonales).

Sean P y Q dos puntos coplanares con $\triangle ABC$. Definamos a X_1, Y_1 y Z_1 como las proyecciones de P sobre BC, CA y AB, respectivamente. Los puntos X_2, Y_2 y Z_2 se construyen de forma análoga para el punto Q. Luego, si P y Q son conjugados isogonales entonces los triángulos $X_1Y_1Z_1$ y $X_2Y_2Z_2$ comparten el mismo circuncírculo. Es más, el circuncentro de esta circunferencia común es el punto medio de PQ.

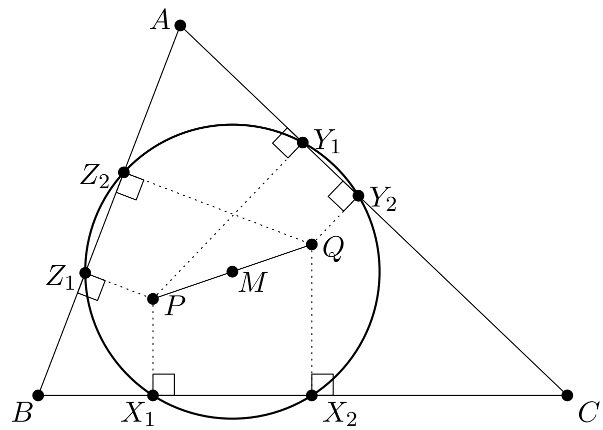


Figura 2: Los triángulos pedales de dos puntos isogonales comparten su circuncírculo.

Prueba. Es sencillo obtener que

$$AZ_1 \cdot AZ_2 = AP \cdot AQ \cdot \cos\angle BAP \cdot \cos\angle BAQ = AY_1 \cdot AY_2$$

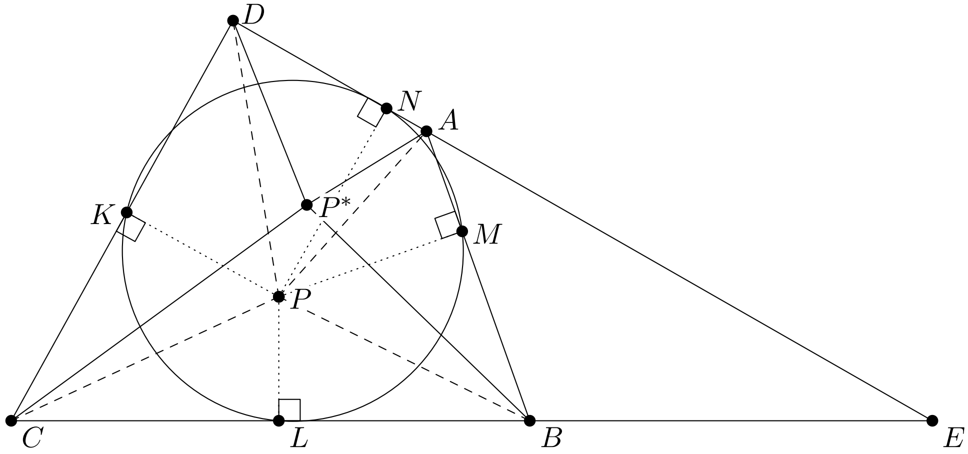
por ende $Z_1Z_2Y_1Y_2$ es cíclico. Como PQY_2Y_1 y PQZ_2Z_1 son trapecios, el circuncírculo de $Z_1Z_2Y_1Y_2$ es el punto medio de PQ. De forma similar podemos demostrar que $Z_2Z_1X_1X_2$ y $X_1X_2Y_2Y_1$ son cíclicos con circuncentro en el punto medio de PQ, así que estos seis puntos están sobre una misma circunferencia. □

Si Q es el circuncentro de $\triangle ABC$ podemos deducir que P es su ortocentro. Básicamente, hemos redescubierto el círculo de los 9 puntos de ABC. El recíproco de este resultado también es válido.

Lema 2 (Puntos isogonales en cuadriláteros).

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto en su mismo plano. Luego, P posee un conjugado isogonal respecto a $ABCD$ si y solo si $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

Prueba. Consideremos a $E = \overline{AD} \cap \overline{BC}$. Sean K, L, M y N los pies de altura desde P hacia DA, CD, BC y AB, respectivamente. Sea P_1 el conjugado isogonal de P respecto a $\triangle EAB$ y P_2 el conjugado isogonal respecto a $\triangle ECD$.



Obsérvese que el conjugado isogonal de P respecto a $ABCD$ existe si y solo si $P_1 = P_2$. No es difícil ver que esto ocurre si y solo si los triángulos pedales de P respecto a $\triangle EAB$ y $\triangle ECD$ poseen un mismo circuncírculo. Por el lema 1 esto equivale a probar que $KLMN$ es cíclico, pero notemos que

$$\begin{aligned}\angle APB + \angle CPD &= \angle APM + \angle MPB + \angle CPK + \angle KPD \\ &= \angle ANM + \angle MLB + \angle CLK + \angle KND \\ &= 360^\circ - (\angle KNM + \angle KLM)\end{aligned}$$

Es decir, el cuadrilátero $KLMN$ tiene un circuncírculo si y solo si $\angle APB$ y $\angle CPD$ son suplementarios. □

Más adelante, en la parte de problemas resueltos, invocaremos este lema.

2. Simedianas

La simediana es la reflexión de la mediana con respecto a la bisectriz interna del mismo vértice. El siguiente lema proporciona una construcción alternativa de esta recta.

Lema 3.

Sea D el punto de intersección de las tangentes por B y C al circuncírculo del triángulo ABC. Luego, AD es una simediana de $\triangle ABC$.

Prueba. Sea $L = \overline{AD} \cap (ABC),\ L \neq A$. Por la ley del seno en circunferencias sabemos que

$$\frac{AB}{BL} = \frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle BAD} = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{CD} = \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{CL}$$

lo que implica, por el teorema de la bisectriz, que las bisectrices internas de $\angle BAC$ y $\angle BLC$ se cortan sobre BC.

Sea M un punto sobre BC tal que $\angle BAD = \angle MAC$ así que, por el argumento anterior, también debe ocurrir que $\angle BLA = \angle CLM$. De esta forma

$$\angle BAM = \angle CAL = \angle MBL \qquad \text{y} \qquad \angle MBA = \angle CLA = \angle MLB$$

por tanto $\triangle ABM \sim \triangle BLM$. Similarmente podemos verificar que $\triangle ACM \sim \triangle CLM$; luego

$$\frac{BM}{LM} = \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL} = \frac{CM}{LM}$$

por consiguiente $BM = CM$. Estamos hechos. □

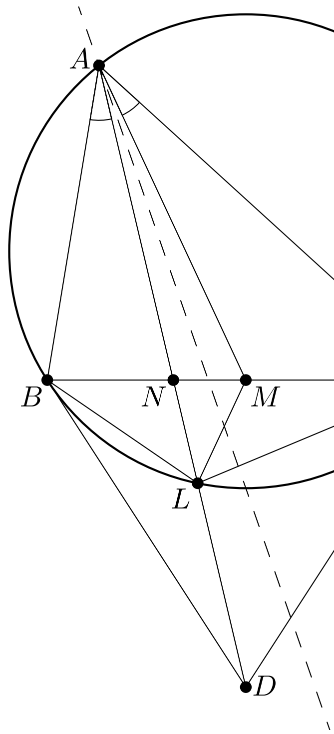


Figura 3: La A-simediana de $\triangle ABC$.

Existen diversas pruebas del lema 3. Un camino considera polares y cuartetas armónicos. Una vía adicional utiliza manipulación trigonométrica y el siguiente hecho.

Lema 4.

Sea N un punto sobre el segmento BC; entonces, N pertenece a la A-simediana si y solo si

$$\frac{BN}{NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Demostración. Surge directamente del teorema de Steiner. □

Recurriendo al lema previo, una aplicación inmediata del teorema de Ceva permite inferir que las tres simedianas de un triángulo ABC concurren en un punto, llamado el *punto simediano* de $\triangle ABC$, de Lemoine o de Grebe.

Dénotese por $d(X, YZ)$ la distancia del punto X a la recta YZ. El lema 4 nos sirve para demostrar la propiedad a continuación.

Lema 5.

Sea P un punto en el mismo plano que $\triangle ABC$. Tendremos que

$$\frac{d(P, AB)}{d(P, AC)} = \frac{AB}{AC}$$

si y solo si P está sobre la A-simediana de $\triangle ABC$.

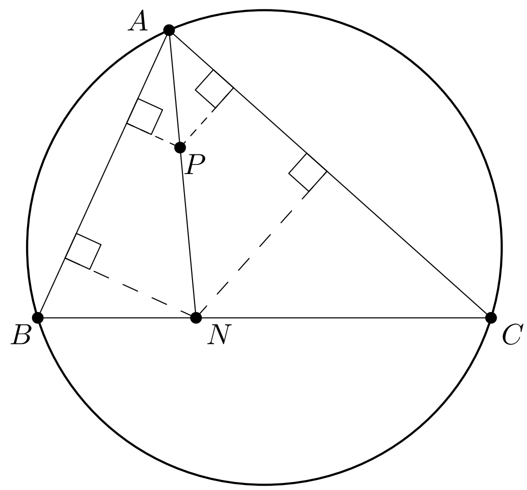


Figura 4: Distancias desde un punto arbitrario de la A-simediana.

Demostración. De acuerdo con el segundo resultado y por el teorema de la bisectriz generalizado obtenemos que, para un punto N sobre BC, AN es la A-simediana si y solo si

$$\frac{\sin\angle BAN}{\sin\angle NAC} = \frac{AB}{BC}$$

Es claro que, por el teorema de Tales, para cualquier punto P sobre AN sucede que

$$\frac{d(P, AB)}{d(P, AC)} = \frac{d(N, AB)}{d(N, AC)} = \frac{\sin\angle BAN}{\sin\angle NAC}$$

Desde luego, por transitividad extraemos la conclusión deseada. □

Esto indica que podemos definir a la A-simediana como el lugar geométrico de los puntos cuyas razones de distancias hacia AB y AC coinciden con la razón de las longitudes de estos dos lados.

Una caracterización intuitiva es la siguiente.

Lema 6.

La A-simediana es el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos formados por las antiparalelas al lado BC de un triángulo ABC y sus puntos de intersección con los otros dos lados.

Demostración. Construyamos puntos D y E sobre AB y AC tales que $BDEC$ sea un cuadrilátero cíclico. Como es usual, definamos a M como el punto medio de BC, mientras que J es el punto medio de DE. Como $\triangle DAE \sim \triangle CAB$, también debe pasar que $\triangle DAJ \sim \triangle CAM$. El resultado sigue. □

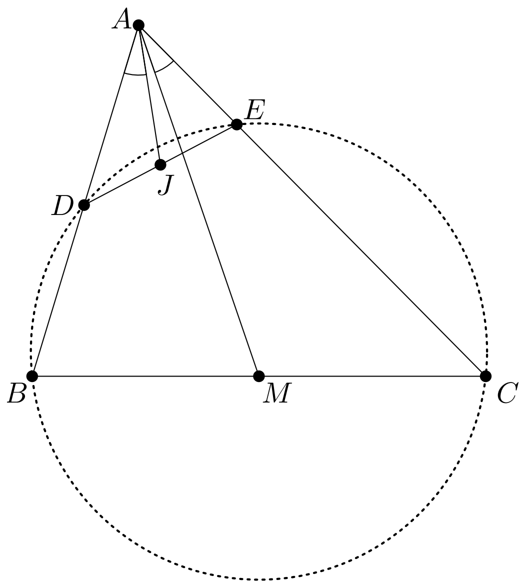


Figura 5: Una caracterización adicional de la A-simediana.

3. Problemas resueltos

Ejemplo 1.

(Gran Bretaña, 2009) Sea MN una recta paralela al lado BC de un triángulo ABC, con M en el lado AB y N en el lado AC. Las rectas BN y CM se cortan en P. Los circuncírculos de los triángulos BMP y CNP se cortan en dos puntos distintos P y Q. Demostrar que AQ es la A-simediana de $\triangle ABC$.

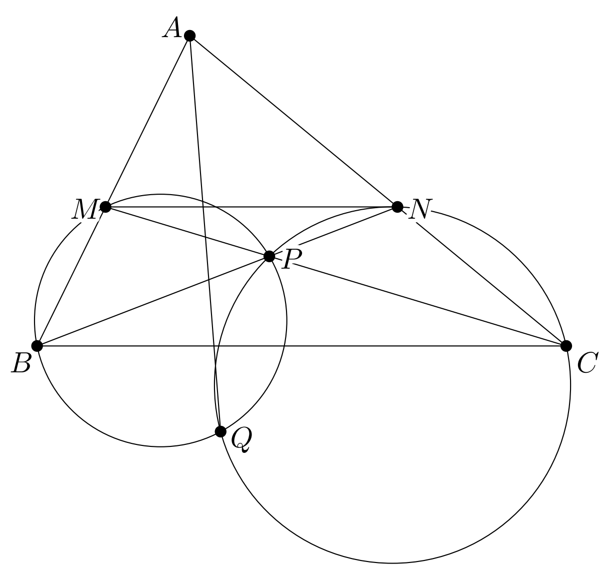


Figura 6: Otra caracterización de la A-simediana

Solución. Notemos que $\angle BQM = \angle BPM = \angle CPN = \angle CQN$ y $\angle MBQ = \angle CPQ = \angle CNQ$, así que $\triangle BQM \sim \triangle NQC$. De este modo, conseguimos que

$$\frac{d(Q, AB)}{d(Q, AC)} = \frac{d(Q, MB)}{d(Q, NC)} = \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC}$$

Por el lema 5, concluimos que AQ es simediana de $\triangle ABC$. □

Ejemplo 2.

(OIM 2016, P5) Las circunferencias C_1 y C_2 se cortan en puntos diferentes A y K. La tangente común a C_1 y C_2 más cercana a K toca a C_1 en B y a C_2 en C. Sea Q el pie de altura desde B a AC, y sea P el pie de altura desde C a AB. Si E y F son los simétricos de K con respecto a las rectas PQ y BC, respectivamente, demostrar que A, E y F son colineales.

Solución. Por potencia, es simple concluir que AK pasa por el punto medio de BC, digamos M. Observemos que

$$\angle BFC = 180° - (\angle MBK + \angle MCK) = 180° - (\angle BAK + \angle KAC) = 180° - \angle BAC$$

por consiguiente, $ABFC$ es cíclico y así $\angle BAF = \angle BCF = \angle KCB = \angle KAC$, de modo que AF es simediana de $\triangle ABC$.

Por su parte, es bien conocido que MP y MQ son tangentes a (APQ), así que por el lema 3 concluimos que AK es simediana de $\triangle PAQ$. Además, $PM^2 = BM^2 = AM \cdot KM$, por lo que K está sobre (PAQ). También AK es simediana de $\triangle PKQ$.

Sea N el punto medio de PQ. Por lo anterior obtenemos que

$$\angle NAQ = \angle KAP = \angle NQK \qquad \text{y} \qquad \angle AQN = \angle AKP = \angle QKN$$

de donde extraemos que $\angle ANQ = \angle QNK$, así que E debe estar sobre AN. Por último, como PQ es antiparalela a BC concluimos por el lema 6 que AF pasa por N, y por ende E también está sobre AF. □

Por último, resolvamos el siguiente problema.

Ejemplo 3.

(IMO 2018, P6) Un cuadrilátero convexo $ABCD$ satisface $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. El punto X en el interior de $ABCD$ es tal que

$$\angle XAB = \angle XCD \qquad \text{y} \qquad \angle XBC = \angle XDA$$

Demostrar que $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Solución. Sea E el punto de intersección de las diagonales de $ABCD$. Como $AB/AD = CB/CD$, podemos construir un punto K sobre el segmento BD tal que AE y AK son conjugadas isogonales en $\angle BAD$, mientras que CE y CK lo son en $\angle BCD$. Construyamos un punto L sobre el segmento AC de forma análoga.

Redefinamos a X como el segundo punto de intersección de (ABK) y (CDK). Probaremos que este es el punto X deseado. Notemos que (usando ángulos dirigidos)

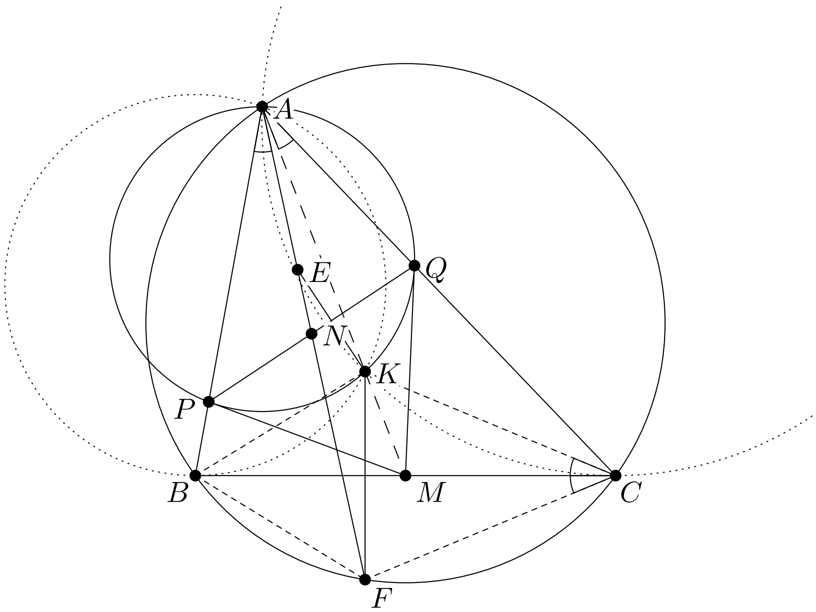


Figura 7: Problema 5 de la OIM 2016.

$$\measuredangle BXD = \measuredangle BXK + \measuredangle KXD = \measuredangle BAK + \measuredangle KCD = \measuredangle EAD + \measuredangle BCE = \measuredangle CAQ + \measuredangle QCA = \measuredangle CQA = \measuredangle BQD$$

así que

$$\measuredangle XBC = \measuredangle XBQ = \measuredangle XDQ = \measuredangle XDA$$

por lo que X coincide con su definición original. Para finalizar, notemos que $\angle AXB + \angle CXD = \angle AKB + \angle CKD$, pero K y L son conjugados isogonales en $ABCD$. Luego, por el lema 2, concluimos que $\angle AKB + \angle CKD = 180°$. La solución está completa. □

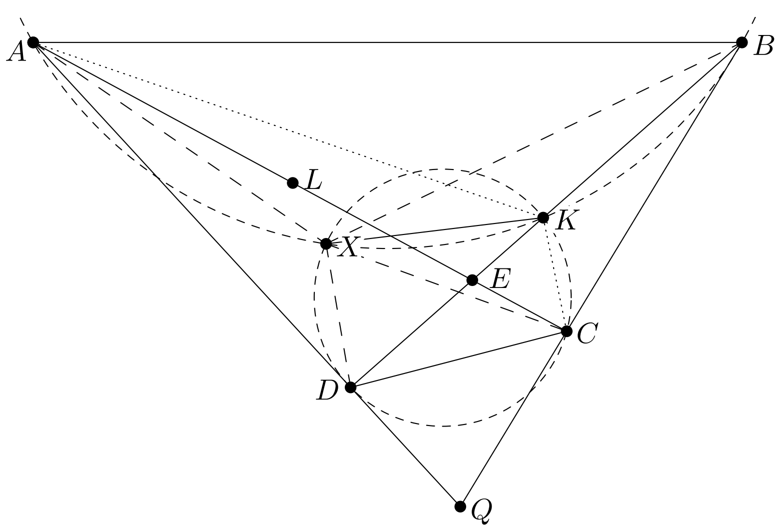


Figura 8: Problema 6 de la IMO 2018

4. Problemas propuestos

1. (Teorema del triángulo pedal de Lemoine) Sea K el punto simediano del triángulo ABC. Demostrar que K es el único punto en el mismo plano de ABC que es baricentro de su propio triángulo pedal.

2. (Primer círculo de Lemoine) Sean $x,\ y,\ z$ las antiparalelas trazadas por K a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Probar que los seis puntos determinados por $x,\ y,\ z$ en los lados de ABC yacen en una misma circunferencia, llamada el primer círculo de Lemoine de $\triangle ABC$.

3. (Segundo círculo de Lemoine) Esta vez, sean $x,\ y,\ z$ las paralelas trazadas por K a las rectas BC, CA y AB. Mostrar que los seis puntos determinados por $x,\ y,\ z$ en los lados de ABC yacen en un mismo círculo, llamado el segundo círculo de Lemoine de $\triangle ABC$.

4. (OIM, 2013) Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos XY de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY. Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D se cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.

5. (Bulgaria, 2011) El punto O está en el interior de ABC. Los pies de las perpendiculares desde O a BC, CA y AB son D, E, F, respectivamente. Las perpendicualres desde A y B hacia EF y FD se cortan en P. Sea H el pie de altura desde P a AB. Demostrar que D, E, F, H son concíclicos.

6. (EE.UU., 2010) En el triángulo ABC, sean P y Q puntos en su interior tales que $\angle ABP = \angle QBC$ y $\angle ACP = \angle QCB$. El punto D está sobre el segmento BC. Probar que $\angle APB + \angle DPC = 180^\circ$ si y solo si $\angle AQC + \angle DQB = 180\circ$.

7. (IMO SL 2008) Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es dado. Probar que existe un punto P en su interior tal que

$$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90^\circ$$

si y solo si las diagonales AC y BD son perpendiculares.

8. (Lista Corta OIM 2017) Sea ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB$, circuncírculo Γ y M punto medio del lado BC. Se escoge un punto N interior a ABC, de modo que si D y E son sus pies de alturas a AB y AC, respectivamente, entonces $DE \perp AM$. El circuncírculo de ADE corta a Γ en L $(L \neq A)$ y las rectas AL y DE se cortan en K. La recta AN corta a Γ en F $(F \neq A)$. Demostrar que si N es el punto medio del segmento AF entonces $KA = KF$.