Academia de Jóvenes Talento - Nicaragua 2018

# Homotecia en circunferencias

Jafet Baca

## 1. Introducción

Al igual que otras configuraciones geométricas, la homotecia constituye una herramienta de amplia utilidad para la resolución de problemas. En este artículo, nos concentraremos a una clase especial: homotecia en circunferencias. Problemas avanzados de las listas cortas de la IMO pueden ser abordados mediante este instrumento y los teoremas relacionados. Antes de resolver algunos ejercicios, es preciso brindar algunas definiciones y hechos fundamentales sobre homotecia en circunferencias.

### 1.1 ¿Qué son el exsimilicentro y el insimilicentro?

**Definición 1.**

Sean $\Omega_1$ y $\Omega_2$ dos círculos con centros $O_1$, $O_2$ y radios $r_1$, $r_2$, respectivamente. Considere puntos $P$ y $Q$ tales que $P$ es el centro de homotecia $\mathcal{H}^+$ con razón $\frac{r_1}{r_2}$ que traslada $\Omega_1$ a $\Omega_2$ y $Q$ es el centro de homotecia $\mathcal{H}^-$con coeficiente $-\frac{r_1}{r_2}$ que transforma $\Omega_1$ en $\Omega_2$. Entonces, $P$ y $Q$ son el *exsimilicentro* e *insimilicentro* de $\Omega_1$ y $\Omega_2$, respectivamente. Además, son puntos únicos.

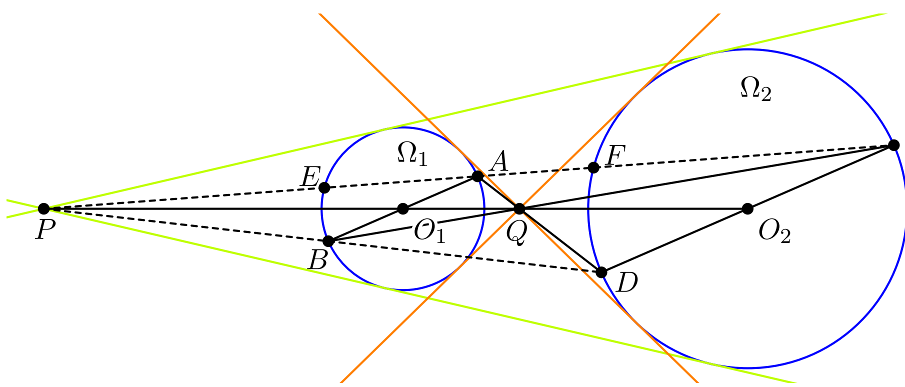



Figura 1: El exsimilicentro $P$ e insimilicentro $Q$ de $\Omega_1$ y $\Omega_2$.

### 1.2 Construcción

¿Cómo construir el exsimilicentro y el insimilicentro? Un método general es el siguiente: Trazamos dos diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en $\Omega_1$ y $\Omega_2$, respectivamente, tales que $AB \parallel CD$. Luego, $P = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ y $Q = \overline{AD} \cap \overline{BD}$. Ya debes intuir qué pasa cuando los radios de ambas círculos tienen la misma medida. Casos límite ocurren cuando una de las circunferencias tiene radio cero, son concéntricas, entre otros;

sin embargo, no nos ocuparemos de ellos aquí.

Una situación particular y muy frecuente en competiciones matemáticas sucede cuando $\Omega_1$ y $\Omega_2$ están en "posición general", es decir, no son cocéntricas, sus radios poseen distinta longitud positiva y no poseen puntos comunes. En este contexto, podemos obtener el exsimilicentro $P$ como el punto común de las tangentes externas de $\Omega_1$ y $\Omega_2$, mientras tanto, $Q$ sería el punto de intersección de las tangentes internas de $\Omega_1$ y $\Omega_2$ (de aquí los prefijos ex- e in-).

### 1.3 Puntos homólogos y antihomólogos

**Definición 2** (Puntos homólogos)**.**

Sea $A$ un punto sobre $\Omega_1$ y $C = \mathcal{H}^+(A)$, es decir, $C$ es un punto sobre $\Omega_2$ tal que $CO_2 \parallel AO_1$ y yace al mismo lado que $A$ con respecto a $O_1O_2$. Luego, $C$ es el homólogo de $A$ respecto a $P$. Por el contrario, si $D = \mathcal{H}^-(A)$, entonces $D$ es el homólogo de $A$ con respecto a $Q$.

En otras palabras, los puntos correspondientes son siempre puntos homólogos, según sea el caso. Es claro que $AC$ pasa por $P$ y $AD$ por $Q$. En la primera figura, los puntos $B,\ D$ y $E,\ F$ también son pares homólogos respecto a $P$ ($E = \overline{PA} \cap \Omega_1,\ E \neq A;\ F = \overline{PC} \cap \Omega_2,\ F \neq C$). En adición, $AB \parallel CD,\ EB \parallel FD$.[1] Por supuesto, existen también puntos antihomólogos.

**Definición 3.**

Sean $E$ y $F$ los segundos puntos de intersección de $AC$ con $\Omega_1$ y $\Omega_2$, respectivamente. Los pares de puntos $A,\ F$ y $E,\ C$ son llamados *antihomólogos* con respecto a $P$.

Obsérvese la principal diferencia entre los primeros y los segundos: mientras $AO_1 \parallel CO_2$ y $EO_1 \parallel FO_2$, los segmentos determinados por puntos antihomólogos y sus respectivos centros no son paralelos, por ejemplo, $EO_1 \nparallel CO_2$ y $AO_1 \nparallel FO_2$. En la siguiente sección, volveremos a encontrarnos con estos puntos.

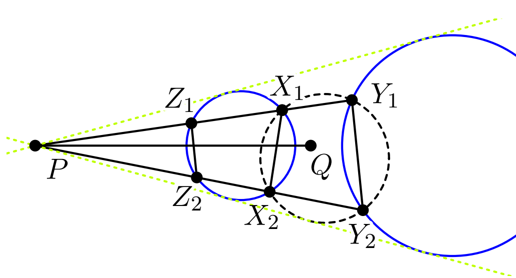
## 2. Algunos resultados útiles

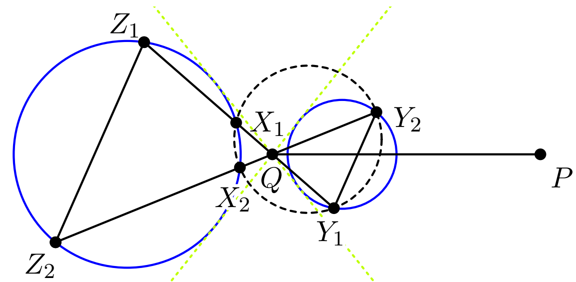
**Lema 1.**

Sean $X_1,\ Y_1$ y $X_2, Y_2$ dos parejas de puntos antihomólogos tales que $X_1Y_1,\ X_2Y_2$ son rectas distintas, $X_1,\ X_2$ yacen sobre $\Omega_1$ y $Y_1,\ Y_2$ están sobre $\Omega_2$. Entonces, el cuadrilátero $X_1Y_1Y_2X_1$ es cíclico.

*Demostración.* Supongamos que estos pares de puntos son antihomólogos respecto al exsimilicentro $P$. Sean $Z_1 = \mathcal{H}^+(Y_1),\ Z_2 = \mathcal{H}^+(Y_2)$, luego $Z_1Z_2 \parallel Y_1Y_2$; por consiguiente, debido a que $Z_1X_1X_2Z_2$ es cíclico, también $X_1Y_1Y_2X_2$ debe serlo. En tanto, si $X_1,\ Y_1$ y $X_2,\ Y_2$ son antihomólogos respecto al insimilicentro $Q$, entonces definamos $Z_1 = \mathcal{H}^-(Y_1),\ Z_2 = \mathcal{H}^-(Y_2)$ y un paso similar al previo nos permite deducir que $X_1,\ Y_1,\ Y_2$ y $X_2$ están sobre una misma circunferencia. $\square$

[1]Nota: Si los pares $X_1 \in \Omega_1,\ Y_1 \in \Omega_2$ y $X_2 \in \Omega_1,\ Y_2 \in \Omega_2$ son homólogos respecto a $P$, $X_1Y_2$ y $X_2Y_2$ no necesariamente deben pasar por $Q$ y si lo son respecto a $Q$, tampoco es cierto que su punto de intersección siempre sea $P$.



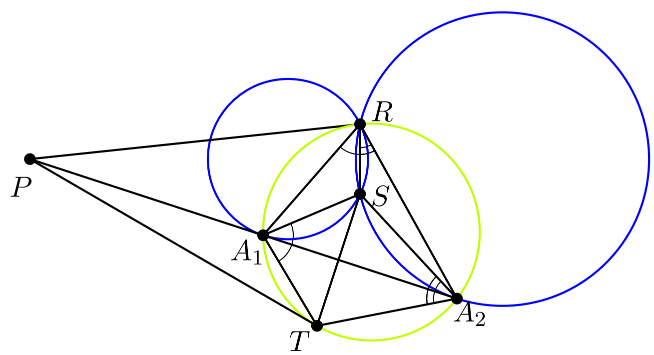

Debido a este resultado, podemos deducir que para dos parejas de puntos antihomólogos respecto al exsimilicentro o insimilicentro $X_1,\ Y_1$ y $X_2,\ Y_2$, tendremos que $PX_1 \cdot PY_1 = PX_2 \cdot PY_2$ o $QX_1 \cdot QY_1 = QX_2 \cdot QY_2$, respectivamente.

**Lema 2.**

Sean $R$ y $S$ los puntos de intersección de dos circunferencias no congruentes $\Omega_1$ y $\Omega_2$, sea $P$ su exsimilicentro y $A_1 \in \Omega_1,\ A_2 \in \Omega_2$ tal que $A_1A_2$ es tangente externamente a ambas circunferencias y $A_1A_2$ está más cerca de $S$ que de $R$. Luego,

i) $PR$ es tangente al circuncírculo del $\triangle A_1RA_2$.

ii) Sea $T$ la reflexión de $S$ en la recta $A_1A_2$; entonces $PT$ es tangente al circuncírculo del $\triangle A_1RA_2$.



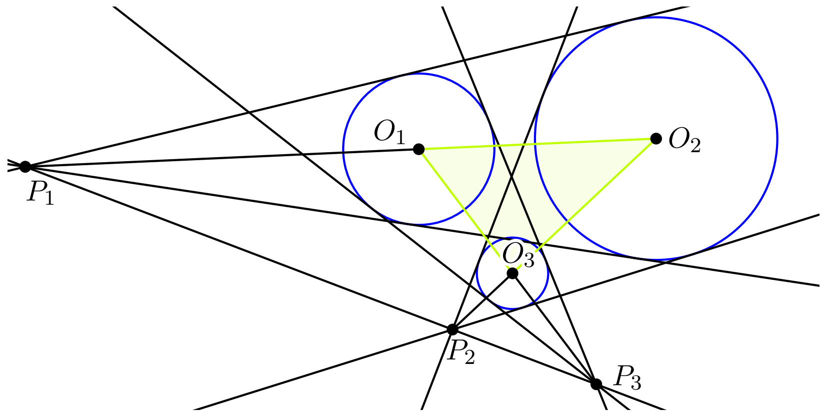

*Demostración.* Notemos que $A_1$ y $A_2$ son puntos antihomólogos (¿por qué?) y $R$ es su propio antihomólogo; por ende, gracias al lema 1 inferimos que $PR^2 = PA_1 \cdot PA_2$, de donde surge el primer hecho. Por otra parte, observemos que,

$$\begin{aligned} \angle A_1TA_2 = 180^\circ - \angle TA_1A_2 - \angle TA_2A_1 &= 180^\circ - \angle SA_1A_2 - \angle SA_2A_1 \\ &= 180^\circ - \angle SRA_1 - \angle SRA_2 = 180^\circ - \angle A_1RA_2 \end{aligned}$$

de este modo, $RA_1TA_2$ es cíclico y $\angle A_1RT = \angle A_1A_2T = \angle A_2RS$. Como $RS$ biseca a $\overline{A_1A_2}$ (¿por qué?), deducimos que $RT$ es la $R$-simediana del $\triangle A_1RA_2$, por lo que $A_1A_2$ es la $A_2$-simediana del $\triangle RA_2T$; dado el hecho i), por consiguiente, $PT$ debe ser tangente a $(A_1RA_2)$ en $T$. □

**Lema 3** (Monge)**.**

Sean $\Omega_1,\ \Omega_2$ y $\Omega_3$ tres circunferencias. Los exsimilicentros de $\Omega_i$ y $\Omega_{i+1}$ (donde los índices son tomados módulo 3) están alineados.



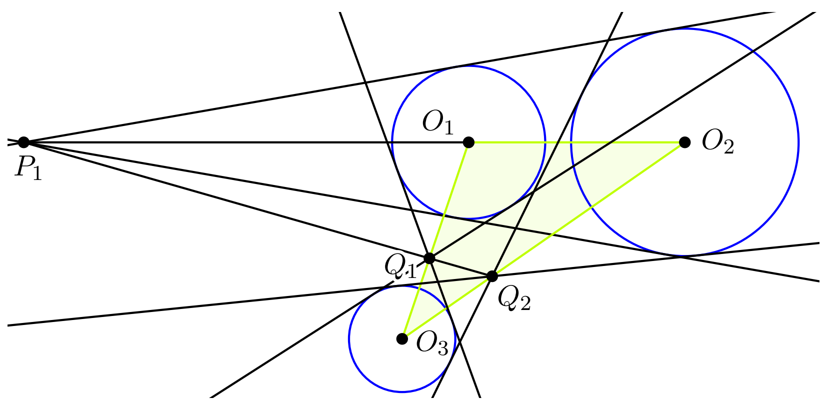

*Demostración.* Sean $O_i$ el circuncentro de $\Omega_i$, $r_i$ el radio de $\Omega_i$ y $P_i$ el exsimilicentro de $\Omega_i,\ \Omega_{i+1}$. Por el teorema de Menelao aplicado al $\triangle O_1O_2O_3$, es suficiente probar que $\frac{P_3O_3}{P_3O_1}\frac{O_1P_1}{P_1O_2}\frac{O_2P_2}{P_2O_3} = 1$, pero,

$$\frac{P_3O_3}{P_3O_1}\frac{O_1P_1}{P_1O_2}\frac{O_2P_2}{P_2O_3} = \frac{r_3}{r_1}\frac{r_1}{r_2}\frac{r_2}{r_3} = 1$$

la conclusión es inmediata. □

**Lema 4** (Monge-d'Alembert)**.**

Dadas tres circunferencias $\Omega_1,\ \Omega_2$ y $\Omega_3$, el exsimilicentro de $\Omega_1$ y $\Omega_2$, el insimilicentro de $\Omega_1$ y $\Omega_3$, y el insimilicentro de $\Omega_2$ y $\Omega_3$ son colineales.




*Demostración.* Sean $P_1$ el exsimilicentro de $\Omega_1$ y $\Omega_2$, $Q_1$ el insimilicentro de $\Omega_1$ y $\Omega_3$, y $Q_2$ el insimilicentro de $\Omega_2$ y $\Omega_3$. Observemos que,

$$\frac{P_1O_1}{P_1O_2}\frac{O_2Q_2}{Q_2O_3}\frac{O_3Q_1}{Q_1O_1} = \frac{r_1}{r_2}\frac{r_2}{r_3}\frac{r_3}{r_1} = 1$$

luego, por el recíproco del teorema de Menelao, concluimos que $P_1,\ Q_1$ y $Q_2$ yacen sobre una misma recta. □

## 3. Problemas resueltos

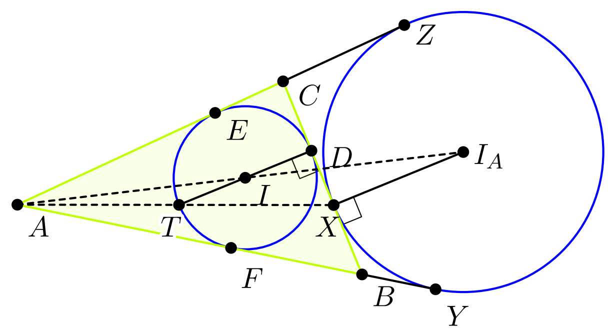
¡Es momento de resolver algunos ejercicios! El primero es un resultado extremadamente útil.

**Ejemplo 1** (Diámetro del incírculo)**.**

El incírculo $\omega$ del triángulo $ABC$ toca al lado $BC$ en $D$. Sea $T$ el antípoda de $D$ en $\omega$. Si $X = \overline{AT} \cap \overline{BC}$, demostrar que $BD = CX$.

*Solución.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AB \geq AC$. Sean $I$ el incentro de $\triangle ABC$ y $X'$ el punto de tangencia del $A$-excírculo $\omega_A$ con $\overline{BC}$. Observemos que $A$ es el exsimilicentro de $\omega$ y $\omega_A$. Como $IT \parallel I_AX'$ y $T$ y $X'$ yacen a un mismo lado de $II_A$, entonces estos últimos son puntos homólogos con respecto a $A$, por ende $A$ yace sobre $X'T$, por lo tanto, $X = X'$.

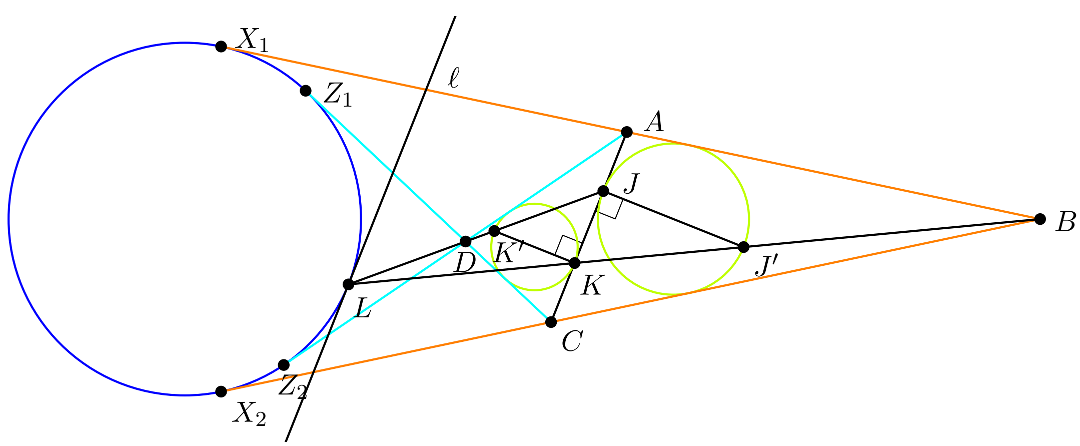
Sean $Z = \overline{AC} \cap \omega_A$, $Y = \overline{AB} \cap \omega_A$. Notemos que $AZ + AY = AB + AC + BC = 2s$, entonces $AZ = AY = s$ y por ende $CX = CZ = s - b$. Definamos a $E = \overline{AC} \cap \omega$, $F = \overline{AB} \cap \omega$, luego $2YF = YF + EZ = BY + BD + CZ + CD = s - c + s - b + a = 2a$, por tanto $BD = BF = YF - BY = a - s + c = s - b = CX$, como requeríamos. □




En otras palabras, este hecho nos dice que los puntos de tangencia del incírculo y el $A$-excírculo con $BC$ son simétricos respecto al punto medio de $\overline{BC}$. Evidentemente, podemos extraer que $BX = CD$.

**Ejemplo 2.**

(IMO 2008, P6) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las longitudes de los lados $BA$ y $BC$ son diferentes. Sean $\omega_1$ y $\omega_2$ las circunferencias inscritas dentro de los triángulos $ABC$ y $ADC$ respectivamente. Se supone que existe una circunferencia $\omega$ tangente a la prolongación del segmento $BA$ a continuación de $A$ y tangente a la prolongación del segmento $BC$ a continuación de $C$, la cual también es tangente a las rectas $AD$ y $CD$. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes exteriores de $\omega_1$ y $\omega_2$ está sobre $\omega$.



*Solución.* Sean $X_1 = \overline{AB} \cap \omega,\ Z_1 = \overline{CD} \cap \omega,\ X_2 = \overline{BC} \cap \omega,\ Z_2 = \overline{AD} \cap \omega$. Obtenemos que,

$$\begin{aligned} BX_1 = BX_2 \Longrightarrow BA + AX_1 &= BC + CX_2 \\ BA + AZ_2 &= BC + CZ_1 \\ BA + AD + DZ_2 &= BC + CD + DZ_1 \\ BA + AD &= BC + CD \qquad (1) \end{aligned}$$

Sean $J = \overline{AC} \cap \omega_1,\ K = \overline{AC} \cap \omega_2$. Utilizando (1), podemos conseguir que

$$AJ = s_{ABC} - BC = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{CD - AD + AC}{2} = s_{ADC} - AD = KC$$

por el ejemplo 1, $J$ es el punto de contacto del $D$-excírculo del $\triangle CDA$ con $AC$ y $K$ el punto de tangencia del $B$-excírculo del $\triangle ABC$ con $AC$. Ahora, consideremos a $J',\ K'$ como los antípodas de $J,\ K$ en $\omega_1,\ \omega_2$, respectivamente. Usando el ejemplo 1, deducimos que $K,\ J',\ B$ son colineales, al igual que $D,\ K',\ J$. Como $K'K$ y $JJ'$ son diámetros paralelos, entonces $L = \overline{K'J} \cap \overline{KJ'}$ es el exsimilicentro de $\omega_1$ y $\omega_2$. Sea $\ell$ la tangente a $\omega$ paralela a $AC$ y al mismo lado de $B$ con respecto a $\omega$. Definamos $L' = \ell \cap \omega$. Observemos que $B$ es el exsimilicentro de $\omega$ y el $B$-excírculo del $\triangle ABC$, por ende, $L',\ K,\ B$ están alineados. Además, $D$ es el insimilicentro de $\omega$ y el $D$-excírculo del $\triangle ADC$, luego $L',\ D,\ J$ son colineales; por tanto, $L' = \overline{DJ} \cap \overline{KB}$, así que $L = L'$. ¡Estamos hechos!

$\square$

**Ejemplo 3.**

(Nicaragua 2018, $2^{do}$ Selectivo OIM , P2) Sea $ABC$ un triángulo acutángulo. Las alturas desde $B$ y $C$ cortan a los lados $AC$ y $AB$ en $E$ y $F$, respectivamente. La bisectriz interna de $\angle A$ corta a $BE$ y $CF$ en $T$ y $S$, respectivamente. Los círculos de diámetros $\overline{AT}$ y $\overline{AS}$ cortan al circuncírculo de $ABC$ en $X$ e $Y$, respectivamente. Probar que $XY,\ EF$ y $BC$ concurren en el exsimilicentro de $BTX$ y $CSY$.

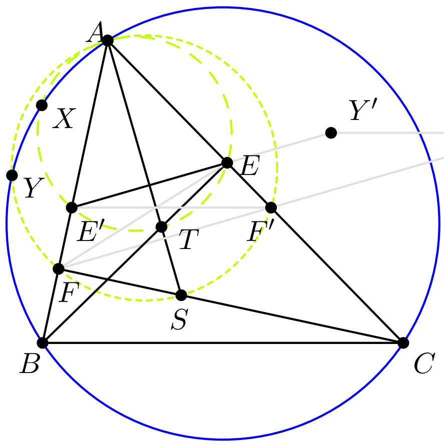
*Solución.* Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $AC \geq AB$. Primero demostremos que $XYFE$ es cíclico. Sea $f$ la inversión con centro en $A$ y radio $\sqrt{AF \cdot AE}$ seguida de una reflexión en la bisectriz interna de $\angle A$. Sean $Y' = f(Y),\ X' = f(X),\ E' = \overline{AB} \cap (AEX),\ F' = \overline{AC} \cap (AYF)$. Veamos que $E'EF'F$ es un trapecio isósceles, por ende $AE \cdot AF = AE' \cdot EF'$, por tanto $f(E') = F'$. Es claro que $f(F) = E$. Como $AYFF'$ y $AXE'E$ son cíclicos, entonces $Y',\ E,\ E'$ y $X',\ F',\ F$ son tripletas de puntos colineales. Es sencillo probar que $E'F' \parallel BC$, por lo que $(AE'F')$ y $(ABC)$ son tangentes, luego, $X'Y' \parallel F'E'$, por tanto $\angle E'EF = \angle E'F'F = \angle Y'X'F$, luego $EY'X'F$ es cíclico, lo cual implica que $XYFE$ también sea cíclico, como deseábamos. Notemos que, por el teorema del eje radical, $XY,\ EF,\ BC$ concurren en un punto, digamos, $Z$. Ahora bien, podemos obtener que,

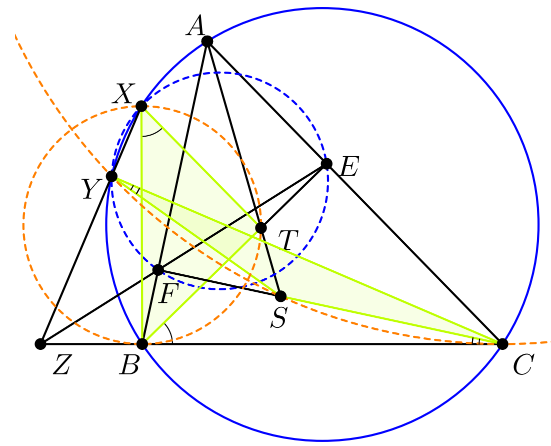
$$\angle BXT = \angle BXA - \angle TXA = 180^\circ - \angle C - 90^\circ = 90^\circ - \angle C = \angle TBC$$

luego, $BC$ es tangente a $(BXT)$. Análogamente podemos deducir que $BC$ es tangente a $(CSY)$. Sean $R_1$ y $R_2$ los circunradios de $\triangle BXT$ y $\triangle CSY$, respectivamente. Encontremos que,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{BT}{CS}\frac{\sin\angle CYS}{\sin\angle BXT} = \frac{BT}{CS}\frac{\sin\angle SCB}{\sin\angle TBC} = \frac{BT}{CS}\frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC}\frac{BF}{CE} = \frac{AE}{AF}\frac{BF}{CE} = \frac{ZB}{ZC}$$

donde hemos usado que $\triangle BAT \sim \triangle CAS,\ AF \cdot AB = AE \cdot AC$ y el teorema de Menelao aplicado al $\triangle ABC$ con transversal $Z - F - E$. Por consiguiente, $Z$ es el exsimilicentro de $(BXT)$ y $(CSY)$. El resultado sigue. $\square$




**Ejemplo 4.**

(IGO 2017, Nivel Avanzado, P4) Tres círculos $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ son tangentes a una recta $\ell$ en puntos $A,\ B,\ C$ ($B$ yace entre $A,\ C$) y $\omega_2$ es externamente tangente a los otros dos. Sean $X,\ Y$ los puntos de intersección de $\omega_2$ con la otra tangente externa común de $\omega_1,\ \omega_3$. La perpendicular por $B$ a $\ell$ corta a $\omega_2$ de nuevo en $Z$. Probar que el círculo con diámetro $AC$ toca a $ZX,\ ZY$.

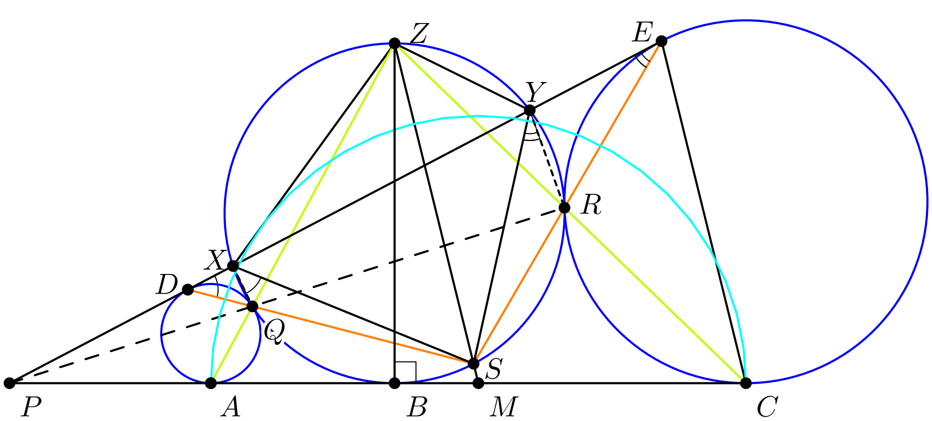
*Solución.* Sean $Q = \omega_1 \cap \omega_2,\ R = \omega_2 \cap \omega_3,\ D = \overline{XY} \cap \omega_1,\ E = \overline{XY} \cap \omega_3,\ P = \overline{XY} \cap \overline{AC}$. Por el teorema de Monge-d'Alembert, $P,\ Q$ y $R$ son colineales. Como $A,\ C$ y $Q,\ R$ son pares de puntos antihomólogos respecto a $P$, por el lema 1, el cuadrilátero $QACR$ es cíclico. Como $D,\ E$ también son antihomólogos respecto a $P$, por el mismo lema concluimos que $DQRE$ es cíclico. Sea $S$ el punto de contacto de la tangente a $\omega_2$ paralela a $XY$ en el lado opuesto a $Z$ respecto a $QR$; entonces, $S$ y $D$ son homólogos respecto a $Q$, mientras tanto, $E$ y $S$ lo son respecto a $R$, por tanto $\overline{RE} \cap \overline{DQ} = S$. Asimismo, como $A,\ Z$ y $C,\ Z$ son homólogos respecto a $Q,\ R$, respectivamente, inferimos que $Z = \overline{AQ} \cap \overline{CR}$. Las deducciones previas implican que $Z$ y $S$ tienen igual potencia respecto a $\omega_1$ y $\omega_3$, por lo cual $ZS$ es el eje radical de $\omega_1,\ \omega_3$ y entonces pasa por el punto medio de $\overline{AC}$, digamos $M$.
Ahora, notemos que,

$$\angle SYR = \angle SZR = \angle ECR = \angle YER$$

por lo tanto, $SY$ es tangente al circuncírculo del $\triangle EYR$. Análogamente, $SX$ es tangente al circuncírculo del $\triangle DXQ$. De este modo,

$$SX^2 = SQ \cdot SD = SR \cdot SE = SY^2$$

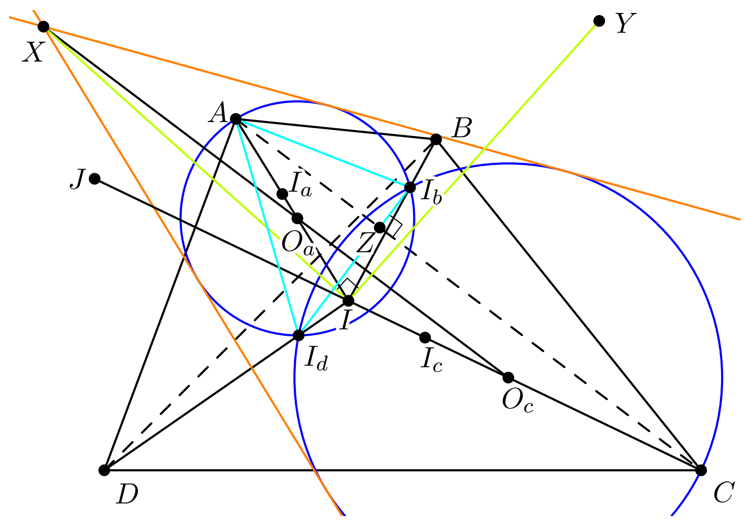
luego, $\triangle XSY$ es isósceles en $S$ y $ZM$ es la bisectriz interior de $\angle XZY$.



Sean $X'$, $Y'$ puntos sobre $\omega_2$ tales que $ZX'$, $ZY'$ son tangentes al círculo $\omega$ con diámetro $\overline{AC}$. Por el dual del teorema de involución de Desargues, los pares de rectas $(ZX',\ ZY')$, $(ZA,\ ZC)$ y $(ZP_\infty,\ ZP_\infty)$ son recíprocos bajo una involución $f$, por lo tanto, sus intersecciones correspondientes con $\omega_2$ también deben formar parejas recíprocas, a saber, $(X', Y')$, $(Q, R)$ y $(B, B)$, por consiguiente, $X'Y'$, $QR$ y $AC$ son concurrentes, es decir, $P$, $X'$, $Y'$ están alineados. Como $ZM$ es la bisectriz interna de $\angle X'ZY'$, tenemos que $SX' = SY'$, entonces $X'Y' \parallel XY$. Como $P \in XY$, $X'Y'$ y $XY$ deben ser la misma recta y por supuesto que $X' = X$, $Y' = Y$. La conclusión sigue. $\square$

**Ejemplo 5.**

(IMO 2017 SL, G7) Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene un círculo inscrito con centro $I$. Sean $I_a$, $I_b$, $I_c$ y $I_d$ los incentros de los triángulos $DAB$, $ABC$, $BCD$ y $CDA$, respectivamente. Suponga que las tangentes externas comunes de los círculos $AI_bI_d$ y $CI_bI_d$ se cortan en $X$, y las tangentes externas comunes de los círculos $BI_aI_c$ y $DI_aI_c$ se cortan en $Y$. Probar que $\angle XIY = 90°$.




*Solución.* Demostraremos los dos siguientes hechos antes de pasar a la solución del problema.

*Afirmación 1.* La recta $I_bI_d$ es perpendicular a $AC$.
Sea $Z \in \overline{AC}$ tal que $I_dZ \perp AC$. Por el ejemplo 1 y por el teorema de Poncelet, sabemos que,

$$AZ = s_{ADC} - CD = \frac{AD + CA - CD}{2} = \frac{AB + AC - BC}{2} = s_{ABC} - BC$$

Ya que $Z$ yace en el mismo lado que $A$ con respecto a $BI$, inferimos que $Z$ es el punto de tangencia del incírculo del $\triangle ABC$ con $AC$, por tanto $I_bZ \perp AC$ y concluimos que $I_bI_d \perp AC$. Similarmente, podemos demostrar que $I_cI_a \perp BD$. $\square$

*Afirmación 2.* Sean $O_a$ y $O_c$ los circuncentros de $\triangle AI_bI_d$ y $\triangle CI_bI_d$. Entonces, $\overline{AO_a} \cap \overline{CO_c} = I$.
Notemos que,

$$\angle I_dAI = \frac{\angle DAC}{2} - \angle IAC = \frac{\angle DAC}{2} - \frac{\angle A}{2} + \angle CAB = \frac{\angle DAC + \angle CAB}{2} + \frac{\angle CAB}{2} - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle CAB}{2}$$

Debido a que $AC$ es altura del $\triangle AI_bI_d$, ocurre que $AC$ y $AO_a$ son conjugadas isogonales del $\triangle AI_bI_d$, por lo que $\angle I_dAO_a = \angle CAI_b = \frac{\angle CAB}{2}$, luego, $\angle I_dAO_a = \angle I_dAI$. Como $O_a$ e $I$ yacen a un mismo lado[2]

[2]Se deja como ejercicio al lector demostrar que $\triangle AI_bI_d$ y $\triangle CI_bI_d$ son acutángulos.

con respecto a $AI_d$, entonces debe suceder que $A,\ O_a$ e $I$ son colineales. Análogamente, $C,\ I_c,\ I$ están alineados y de aquí el resultado. $\square$

Pasemos a la solución del problema. Ya que $I_bI_d$ es el eje radical de $(AI_bI_d)$ y $(CI_bI_d)$, entonces $O_aO_c \perp I_bI_d$, por tanto $AC \parallel O_aO_c$, de esta manera,

$$\frac{XO_a}{XO_c} = \frac{AO_a}{CO_c} = \frac{O_aI}{O_cI}$$

lo cual implica que $IX$ es la bisectriz exterior del $\angle AIC$. Siguiendo un camino análogo podemos probar que $IY$ biseca externamente a $\angle BID$. Sea $J$ un punto sobre $CI$ más allá de $I$. Previamente obtuvimos que $\angle JIX = \angle AIX$; pero,

$$\angle JID = \frac{\angle C + \angle D}{2} = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2} = \angle BIA$$

por consiguiente, $IX$ es la bisectriz interior del $\angle BID$, por ende $\angle XIY = 90^\circ$, como necesitábamos. $\square$

## 4. Problemas propuestos

La homotecia en circunferencias nos permite visualizar colinealidad y paralelismo entre puntos homólogos, cíclicos entre puntos antihomólogos y varias razones y proporciones, por lo que debes estar listo para hacer manipulación de longitudes, lo cual puede involucrar trigonometría y teoremas clásicos sobre puntos alineados, incluso razones cruzadas (poco frecuente) y división armónica. Los siguientes ejercicios pueden ser resueltos mediante diversos métodos, pero es recomendable usar los resultados que acá hemos obtenido (¡de eso se trata!). Están ordenados según mi criterio de facilidad :). ¡Feliz resolución de problemas!

1. El incírculo de $\triangle ABC$ tiene centro $I$ y toca a $BC$ en $D$. $\overline{AD}$ es una altura de $\triangle ABC$; $M$ es el punto medio de $\overline{AD}$. Sea $I_A$ el $A$-excentro de $\triangle ABC$. Demostrar que $M,\ E,\ I_A$ son colineales.

2. ¡Esas simedianas ocultas!

   *a*) (Vietnam 2001) En el plano, dos círculos se intersecan $A$ y $B$, y una tangente común corta a los círculos en $P$ y $Q$. Las tangentes en $P$ y $Q$ al circuncírculo del $\triangle APQ$ se intersecan en $S$. Sea $H$ la reflexión de $B$ en $PQ$. Probar que $A,\ S$ y $H$ son colineales.

   *b*) (OIM 2016, P5) Las circunferencias $C_1$ y $C_2$ se cortan en puntos diferentes $A$ y $K$. La tangente común a $C_1$ y $C_2$ más cercana a $K$ toca a $C_1$ en $B$ y a $C_2$ en $C$. Sea $P$ el pie de altura desde $B$ a $AC$, y sea $Q$ el pie de altura desde $C$ a $AB$. Si $E$ y $F$ son los simétricos de $K$ con respecto a las rectas $PQ$ y $BC$, respectivamente, demostrar que $A, E$ y $F$ son colineales.

3. (Sharygin 2016, Ronda de Correspondencia) Un triángulo $ABC$ es dado. Considere el círculo tangente a $(ABC)$ en $A$ y externamente tangente al incírculo de $\triangle ABC$ en algún punto $A_1$. Los puntos $B_1,\ C_1$ son definidos similarmente.

   - Pruebe que las rectas $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ concurren.
   - Sea $A_2$ el punto de contacto del incírculo con $BC$. Demuestre que $AA_1$ y $AA_2$ son simétricas respecto a la bisectriz interna del $\angle A$.

4. (Sharygin 2018, Ronda de Correspondencia) Cada uno de los círculos $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ toca a los otros dos círculos externamente, y todos ellos tocan un círculo $\Omega$ internamente en puntos $A_1,\ B_1,\ C_1$, respectivamente. La tangente interna común a $\alpha$ y $\beta$ corta al arco $\widehat{A_1B_1}$ que no contiene a $C_1$ en $C_2$. Los puntos $A_2,\ B_2$ son definidos similarmente. Probar que $A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2$ concurren.

5. (Rumanía 2007) Los círculos $\omega_a,\ \omega_b,\ \omega_b$ están dentro de $\triangle ABC$ tales que son tangentes externamente dos a dos y, $\omega_a$ es tangente a $AB$ y $AC$, $\omega_b$ es tangente a $BA$ y $BC$, $\omega_c$ es tangente a $CA$ y $CB$. Sea $D$ el punto común de $\omega_b,\ \omega_c$, $E$ el punto común de $\omega_c,\ \omega_a$ y $F$ el punto común de $\omega_a,\ \omega_b$. Mostrar que $AD,\ BE,\ CF$ son concurrentes.

6. (IGO 2016, Nivel Avanzado, P3) En el cuadrilátero convexo $ABCD$, sea $P$ el punto de intersección de $AC$ y $BD$. Suponga que $I_1$ e $I_2$ son los incentros de $\triangle PAB$ y $\triangle PDC$, respectivamente. Sea $O$ el circuncentro de $PAB$, y $H$ el ortocentro de $PDC$. Muestre que $(AI_1B)$ y $(DHC)$ son tangentes si y sólo si $(AOB)$ y $(DI_2C)$ son tangentes también.

7. (Irán 2010) Los círculos $\omega_1,\ \omega_2$ se intersecan en $P,\ K$. Los puntos $X,\ Y$ están sobre $\omega_1$ y $\omega_2$, respectivamente, tal que $XY$ es tangente externamente a ambos círculos y está más cerca de $P$ que de $K$. La recta $PX$ corta a $\omega_2$ por segunda vez en $C$ y la recta $PY$ interseca nuevamente a $\omega_1$ en $B$. Las rectas $BX$ y $CY$ se cortan en $A$. Si $Q$ es el segundo punto de intersección de $(ABC)$ y $(AXY)$, probar que $\angle QXA = \angle QKP$.

8. (IMO 2009 SL, G8) Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito. Sea $g$ una recta por $A$ que corta a $\overline{BC}$ en $M$ y a la recta $CD$ en $N$. Denote por $I_1,\ I_2$ e $I_3$ los incentros de $\triangle ABM,\ \triangle MNC$ y $\triangle NDA$, respectivamente. Mostrar que el ortocentro de $\triangle I_1I_2I_3$ yace sobre $g$.

9. (IMO 2007 SL, G8) El punto $P$ yace sobre el lado $AB$ de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Sea $\omega$ el incírculo de $\triangle CPD$, y sea $I$ su incentro. Suponga que $\omega$ es tangente a los incírculos de $\triangle APD$ y $\triangle BPC$ en puntos $K$ y $L$, respectivamente. Las rectas $AC$ y $BD$ se cortan en $E$, y las rectas $AK$ y $BL$ se cortan en $F$. Probar que $E,\ I$ y $F$ son colineales.

10. Dos problemas relacionados.

    *a*) (ELMO 2011, P1) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sean $E, F, G, H$ puntos en los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, respectivamente, y sea $P$ la intersección de $EG$ y $FH$. Dado que los cuadriláteros $HAEP, EBFP, FCGP, GDHP$ todos tienen círculos inscritos, demostrar que $ABCD$ también tiene un círculo inscrito.

    *b*) (IMO 2015 SL, G7) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, y sean $P,\ Q,\ R$ y $S$ puntos en los lados $AB,\ BC,\ CD$ y $DA$, respectivamente. Los segmentos $PR$ y $QS$ se cortan en $O$. Suponga que cada uno de los cuadriláteros $APOS,\ BQOP,\ CROQ$ y $DSOR$ tiene un incírculo. Pruebe que las rectas $AC,\ PQ$ y $RS$ concurren o son paralelas.