Academia de Jóvenes Talento - Nicaragua 2018

¡Invirtamos y reflejemos un poco!

Jafet Baca

En este artículo -cuyo requisito principal es dominar las propiedades básicas de inversión y semejanza espiral-, se introduce un método de resolución de problemas geométricos poco usual, sin embargo, bastante útil: la composición de inversión y reflexión con respecto a la bisectriz interna de un ángulo determinado. En lo que sigue, obtendremos las imágenes de puntos generalmente utilizados, resolveremos problemas recientes y se proponen ejercicios al lector.

1. Introducción

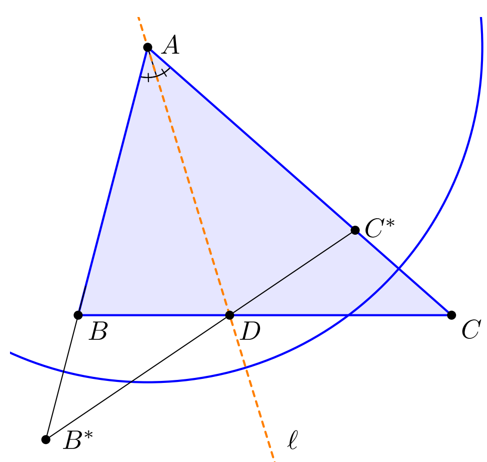
Primero, establezcamos el siguiente resultado.

Lema 1.

Sea ABC un triángulo. Llamemos por f la inversión con centro A y radio $r = \sqrt{AB \cdot AC}$ y sea g la reflexión con respecto a la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$. Definamos la siguiente función,

$$\Phi = g \circ f$$

entonces, se tiene que $\Phi(B) = C$.



Prueba. Sea $X^* = f(X)$. Veamos que,

$$AB \cdot AB^* = AB \cdot AC = AC^* \cdot AC$$

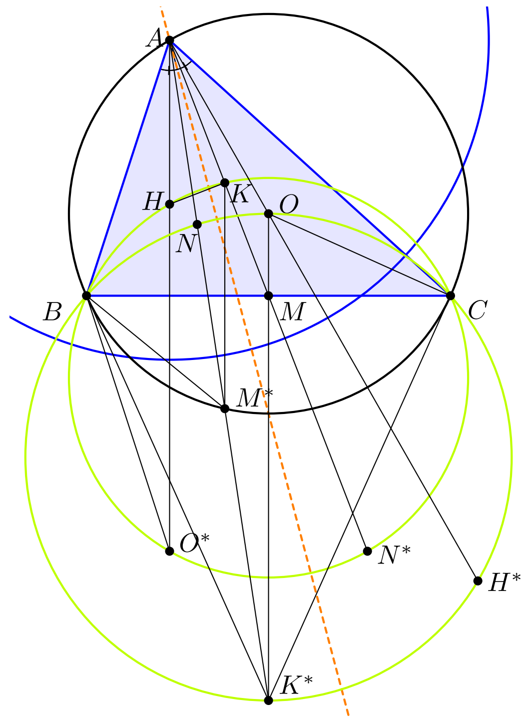
por lo que $AB^* = AC$ y $AB = AC^*$. Ya que $\triangle B^*AC$ es isósceles, se sigue que $C = g(B^*)$, de donde $\Phi(B) = C$. □

Evidentemente, Φ hereda las propiedades de inversión, por lo que también ocurre que $\Phi(C) = B$ y $\Phi(BC) = (ABC)$. Además, resulta que el cuadrilátero BB^*CC^* es un trapecio isósceles, luego, por simetría, el punto $D = \overline{BC} \cap \overline{B^*C^*}$ pertenece a la bisectriz interna del $\angle A$, a saber, ℓ. Observemos un dato fundamental: los vértices de $\triangle ABC$ son *fijos* bajo esta inversión especial.

A pesar de su sencillez, esta composición particular de inversión y reflexión nos permitirá adelante resolver problemas de dificultad avanzada, por ejemplo, el séptimo problema de geometría euclidiana del shortlist de la IMO 2016.

2. Algunas imágenes de puntos, rectas y circunferencias útiles

2.1 Circuncentro, ortocentro y la A-simediana



Sean O, H, K, N y M el circuncentro, el ortocentro, el A-punto HM, el punto medio de $\overline{BC}$ y el punto medio de la cuerda A-simediana, todos respecto al $\triangle ABC$. Naturalmente, para cualquier recta ψ que pasa por A, tenemos que $f(\psi) = \psi$, por lo que $\Phi(\psi)$ será la reflexión de ψ con respecto a ℓ. Por tanto, cualquier par de rectas isogonales con respecto a los lados AB y AC son sus imágenes correspondientes. Siendo así, $\Phi(AH) = AO$ y $\Phi(AN) = AM$. Ahora, obtenemos los siguientes resultados.

Lema 2.

1. La imagen de O es la reflexión de A con respecto a $\overline{BC}$, a saber O^*.
2. Sea $H^* = (BOC) \cap \overline{OA}$, entonces $\Phi(H) = H^*$.
3. El circuncírculo de $\triangle BHC$ se transforma en el circuncírculo de $\triangle BOC$.
4. Sea K^* el punto de intersección de las tangentes a (ABC) por B y C. Luego $\Phi(K) = K^*$.
5. $\Phi(N) = N^*$.
6. La imagen de M es M^*.
7. El punto K es la reflexión de M^* en $\overline{BC}$.

Sketch. Las dos primeras propiedades podemos demostrarlas mediante semejanza de triángulos y utilizando isogonales adecuadas. Por ejemplo, para el resultado 1, es suficiente probar que $\triangle BAO^* \sim \triangle OAC$, ya que obtendríamos que $BA \cdot CA = O^*A \cdot OA$, y por ende, $\Phi(O) = O^*$. En el caso del punto 3, esto surge de los dos primeros hechos y de que $\Phi(B) = C$. Para el ítem 4, necesitamos probar que K^* yace sobre el circuncírculo del $\triangle ABC$, tan obvio como es. La prueba del resultado 5 es completamente similar. Para el inciso 6, recuerda que $\Phi(BC) = (BAC)$. Para el séptimo hecho, $\angle M^*BC = \angle M^*AC = \angle BAM = \angle KN^*C = \angle KBC$ y análogamente $\angle KCB = \angle BCM^*$, por lo que $BKCM^*$ es un romboide y la conclusión es inmediata. $\square$

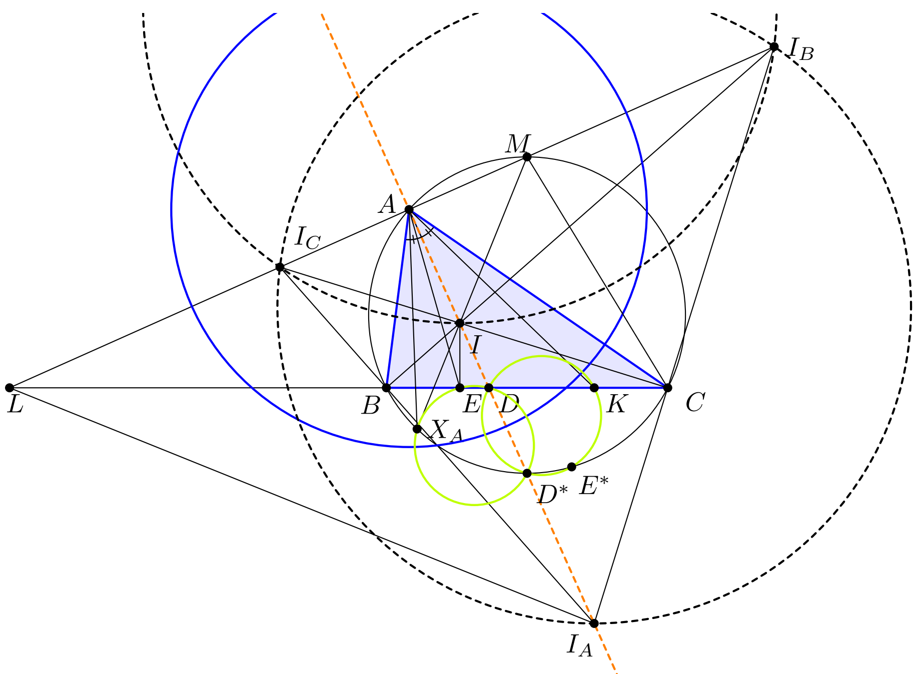
2.2 ¿Y qué acerca del incentro?

Esta configuración es aún más impresionante. Definamos puntos I, I_A, I_B e I_C como es usual, X_A el punto de tangencia del incírculo $A-$mixtilíneo y (BAC), L un punto sobre BC tal que AL es la bisectriz exterior del $\angle A$, D y D^* los puntos de corte del rayo AI con $\overline{BC}$ y (BAC), respectivamente, M el punto medio de $\widehat{BAC}$, D el punto de tangencia del incírculo con $\overline{BC}$ y K su simétrico con respecto al punto medio de $\overline{BC}$ y E^* la segunda intersección de (DKD^*) con (BAC). Podemos deducir lo siguiente:

Lema 3.

1. El inverso de I es I_A.
2. I_C e I_B son imágenes mutuas bajo Φ.
3. El circuncírculo de $\triangle I_A I_B I_C$ se transforma en el circuncírculo de $\triangle I_B I I_C$.
4. $\Phi(X_A) = K$.
5. La imagen de M es L.
6. La imagen de D es D^*.
7. $\Phi(E^*) = E$.

Sketch. Semejanza otra vez. Para la primera conclusión, muestra que $\triangle BAI \sim \triangle I_A AC$. Análogamente, el hecho 2 surge con la semejanza de $\triangle I_C AB$ e $\triangle ACI_B$. A partir de estos dos resultados podemos inferir el espectacular inciso 3. Para 4, nuevamente recuerda que $\Phi(BC) = (BAC)$ y que AX_A y AK son isogonales (esto es excesivamente útil). Para el quinto resultado, la receta es semejanza, pero primero prueba que MC es tangente a (LAC). La demostración del hecho 6 es trivial. El punto 7 merece más detalles. Es conocido que X_A es el centro de semejanza espiral que manda $\overline{BE}$ a $\overline{AC}$, entonces $\angle BEX_A = \angle ACX_A = \angle AD^*X_A$, luego X_AEDD^* es cíclico. Notemos que (X_AEDD^*) es la imagen de (DKD^*E^*), por tanto $\Phi(E^*)$ debe ser la intersección de BC con el primero, es decir, el punto E, como requeríamos. □



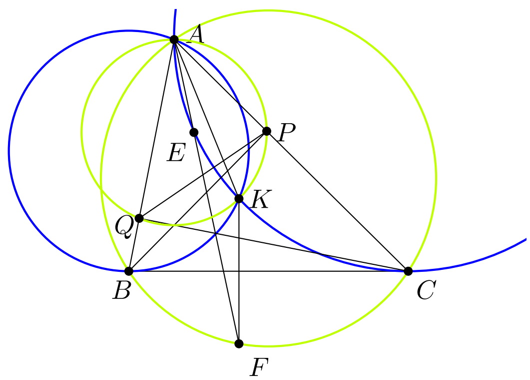
3. Problemas resueltos

¡Vamos a divertirnos un rato!

Ejemplo 1.

(OIM 2016, P5) Las circunferencias C_1 y C_2 se cortan en puntos diferentes A y K. La tangente común a C_1 y C_2 más cercana a K toca a C_1 en B y a C_2 en C. Sea P el pie de altura desde B a AC, y sea Q el pie de altura desde C a AB. Si E y F son los simétricos de K con respecto a las rectas PQ y BC, respectivamente, demostrar que A, E y F son colineales.

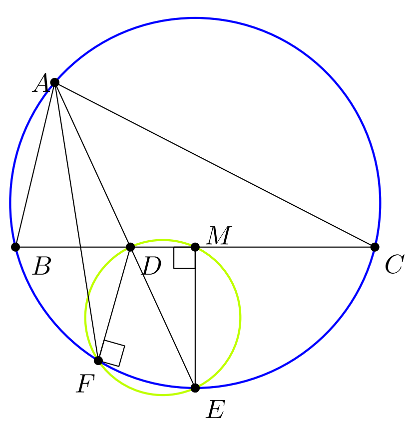
Prueba. Observemos que $\angle CBF = \angle KBC = \angle BAK$ y $\angle BCF = \angle KCB = \angle CAK$, por tanto $\angle BFC = 180° - \angle A$ y $BACF$ es cíclico, entonces $\angle BAF = \angle BCF = \angle KCB = \angle CAK$. Como AK biseca a $\overline{BC}$, inferimos que AF es simediana del $\triangle ABC$. Por ser PQ antiparalela a BC, entonces AF es mediana y AK es simediana del $\triangle AQP$. Además, por el lema 2.7, K es el $A-$punto HM en $\triangle ABC$, por lo que $K \in (AQP)$; por ende, el misma lema nos permite deducir que E es el $A-$punto HM del $\triangle AQP$, por lo que AE biseca a $\overline{QP}$ y de ahí el resultado. $\square$



Ejemplo 2.

(Olimpiada Matemática Rusa, 2009) En el triángulo ABC con circuncírculo Φ, la bisectriz interna del ángulo $\angle A$ interseca a $\overline{BC}$ en Dy Ω por segunda vez en E. EL círculo de diámetro $\overline{DE}$ corta a Ω nuevamente en F. Probar que $\overline{AF}$ es una simediana del triángulo ABC.

Prueba. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Es claro que $DMEF$ es cíclico. Ya que $\Phi(D) = E$, el círculo $(DMEF)$ es ortogonal a la circunferencia de centro A y radio $r = \sqrt{AB \cdot AC}$ y como su diámetro DE yace sobre la bisectriz interna de $\angle A$, entonces $(DMEF)$ es su propia imagen bajo Φ. Luego, $\Phi(M)$ es el segundo punto de intersección de $(DMEF)$ y $\Phi(BC) = (BAC)$, a saber, F. Por el lema 2.6, F tiene que ser el segundo punto de intersección de la $A-$simediana con Ω. El resultado sigue. $\square$



Ejemplo 3.

(USAMO 2017, P3) Sea ABC un triángulo escaleno con circuncírculo Ω e incentro I. El rayo AI corta a $\overline{BC}$ e interseca a Ω de nuevo en M; el círculo con diámetro $\overline{DM}$ corta Ω otra vez en K. Las rectas MK y BC se cortan en S, y N es el punto medio de $\overline{IS}$. Los circuncírculos de $\triangle KID$ y $\triangle MAN$ se cortan en puntos L_1 y L_2. Probar que Ω pasa por el punto medio de $\overline{IL_1}$ o $\overline{IL_2}$.

Prueba. Sean M^*, K^*, T, I_A y R el punto medio de $\widehat{BAC}$, el punto medio de $\overline{BC}$, el segundo punto de intersección de la recta M^*I con Ω, el A- excentro de $\triangle ABC$ y el punto donde M^*I corta nuevamente a (BIC). Inicialmente, notemos que los cuadriláteros AM^*K^*D y DK^*MK son cíclicos, luego, por el teorema del eje radical, M^*A pasa por S, por lo que $\angle SAI = 90°$. Asimismo, $\angle M^*AI_A = 90° = \angle M^*RI_A$, así que AM^*I_AR es cíclico, por lo que el mismo teorema antes mencionado nos lleva a concluir que I_AR pasa por S. Como $\angle M^*TM = 90° = \angle M^*RI_A$, entonces $MT \parallel I_AR$ y ya que $MN \parallel I_AS$, deducimos que N, T y M son colineales. En adición, inferimos que T es el punto medio de $\overline{IR}$, por lo que es suficiente probar que R es un punto común de (MAN) y (KID).

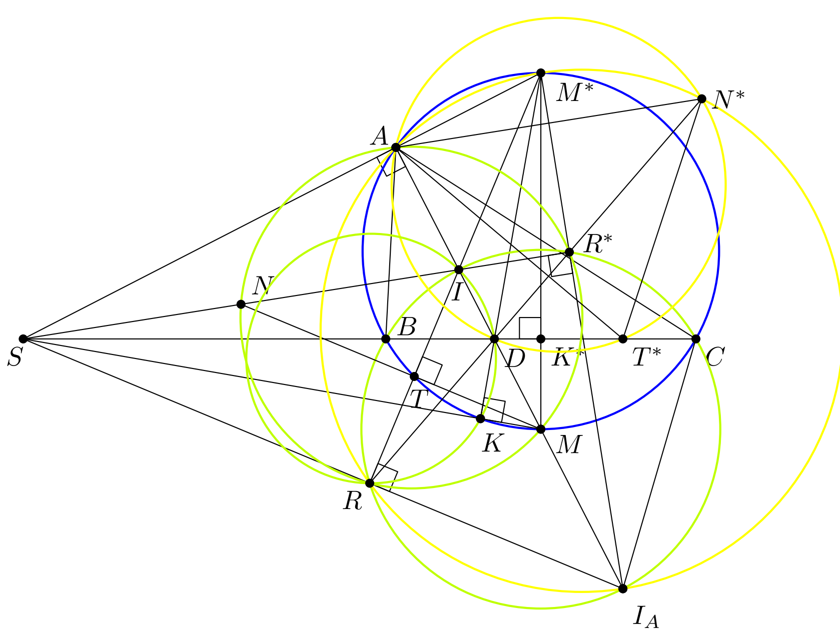
Sea $R^* = \overline{SI} \cap \overline{M^*I_A}$. El ortocentro de $\triangle SM^*I_A$ es I, así que $\angle IR^*I_A = 90°$ y por ende $R^* \in (BIC)$. Notemos que $\angle AR^*I = \angle AM^*I = \angle AI_AR$ e $\angle IAR^* = \angle IM^*I_A = \angle RAI_A$, por tanto $\triangle RAI_A \sim \triangle IAR^*$, luego $AR \cdot AR^* = AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$, entonces $\Phi(R) = R^*$. Definamos los puntos $N^* = \Phi(N)$ y $T^* = \Phi(T)$. Sabemos que T^* yace sobre $\overline{BC}$ tal que $\angle BAT = \angle T^*AC$. Como N, T y M son colineales, entonces N^*, T^*, $\Phi(M) = D$ y A son concíclicos. Como N y R^* está sobre SI, también R, N^*, $\Phi(S) = M^*$, $\Phi(I) = I_A$ y A yacen sobre una misma circunferencia, luego $N^* = (ADT^*) \cap (AM^*I_AR)$, $N^* \neq A$. Ahora bien, $\Phi[(MAN)] = DN^*$ y $\Phi[(KID) = (K^*I_AM)]$, pero observemos que,

$$\angle AN^*D = \angle AT^*D = \angle AMT = \angle AI_AR = \angle AN^*R$$

luego, D, R^* y N^* son colineales. Además, AI es la bisectriz del $\angle RAR^*$ y M es el circuncentro de $\triangle RIR^*$, entonces M yace sobre (RAR^*), cuyo inverso respecto a (BIC) es RR^*. Como $MI^2 = MD \cdot MA$, concluimos que D es el inverso de A respecto a (BIC) y por ende R, D y R^* están alineados. Concluimos que D, R^* y N^* son colineales, por consiguiente, R está sobre (MAN). Además, dado que M^*C es tangente a (BIC), entonces,

$$M^*M \cdot M^*K^* = M^*C^2 = M^*R^* \cdot M^*I_A$$

así, $R^*K^*MI_A$ es cíclico, por lo que R está sobre (KID). ¡Estamos hechos! □



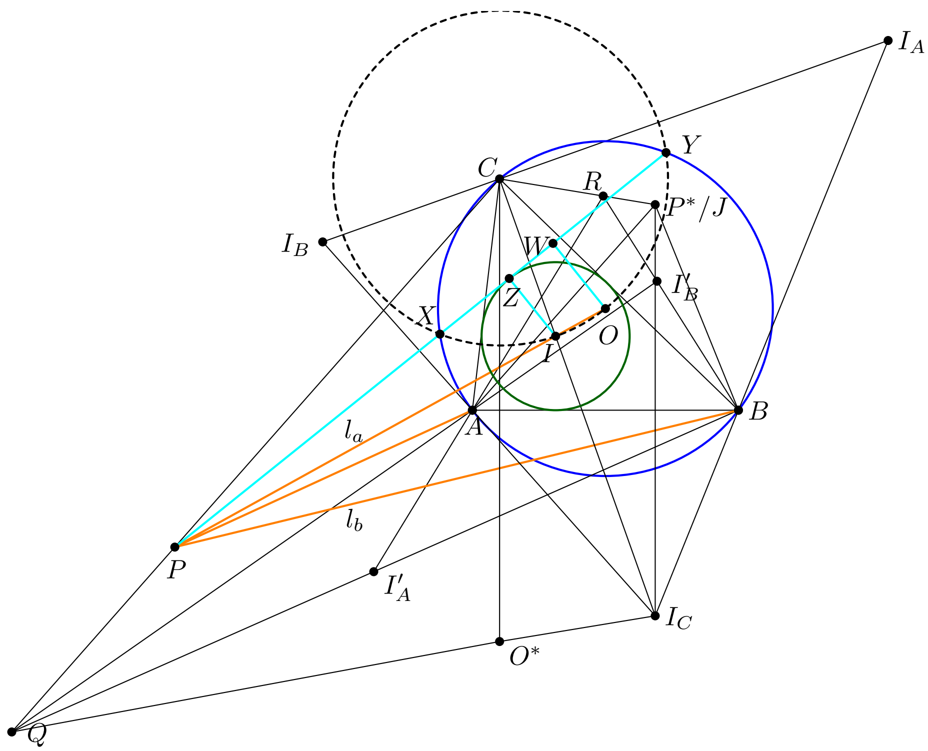
Ahora, disfrutemos resolver el penúltimo problema de geometría euclidiana del IMO 2016 SL.

Ejemplo 4.

(IMO 2016 SL, G7) Sea I el incentro de un triángulo no equilátero ABC, I_A el $A-$excentro, I'_A la reflexión de I_A en BC, y l_a la reflexión de la recta AI'_A en AI. Defínanse puntos I_B, I'_B y la recta l_B análogamente. Sea P el punto de corte de l_A y l_B.

i) Probar que P yace en la recta OI, donde O es el circuncentro del triángulo ABC.

ii) Una de las tangentes desde P al incírculo del triángulo ABC corta al circuncírculo en puntos X e Y. Mostrar que $\angle XIY = 120°$.



Prueba i). Primero hagamos algunas preparaciones. Sea Φ la inversión centrada en C con radio $\sqrt{CA \cdot CB}$ seguida de una reflexión en CI. Como $\Phi(I_B) = I_A$ entonces $CI_B \cdot CI_A = CA \cdot CB$, luego $CI'_B \cdot CI'_A = CA \cdot CB$, entonces $\Phi(I'_A) = I'_B$, por tanto $\triangle I'_A CA \sim \triangle BCI'_B$. Por definición de l_a y l_b, tenemos que $\angle PAB = \angle CAI'_A = \angle CI'_B B$ y $\angle ABP = \angle I'_B BC = \angle AI'_A C$, de donde surge que $\triangle PAB \sim \triangle CAI'_A \sim \triangle CI'_B B$. Sea $R = \overline{I'_A A} \cap \overline{I'_B B}$. Nótese que C es el centro de semejanza espiral que manda $\overline{AI'_A}$ a $\overline{I'_B B}$, así que $CRBI'_A$ y $CAI'_B R$ son cíclicos, a la vez que manda $\overline{I'_A B}$ a $\overline{AI'_B}$. Como $\triangle I_B CA \cong \triangle ACI'_B$, entonces $\triangle I_B CA \sim \triangle I'_A CB \sim \triangle ACI'_B$, por lo que,

$$\angle BI'_A C = \angle I'_B AC = \angle CAI_B = 90° - \frac{\angle A}{2}; \qquad \angle CBI'_A = \angle CI'_B A = \angle CI_B A = 90° - \frac{\angle B}{2}$$

Sea $Q = \overline{AI'_B} \cap \overline{I'_A B}$. Podemos inferir que,

$$\angle AQB = \angle I'_B AB - \angle ABI'_A = \angle A - \angle I_B AC - \angle CBI_A + \angle B = 90° - \frac{\angle C}{2} - \angle C$$

pero $\angle APB = \angle I'_A CA = 90° - \frac{\angle C}{2} - \angle C$, luego, $PABQ$ es cíclico. Ahora bien, $(CAI'_B R) = \Phi(I'_A B)$ y $(CI'_A BR) = \Phi(AI'_B)$, por tanto $\Phi(Q) = R$. Por otro lado, veamos que B envía $\overline{AP}$ a $\overline{CI'_B}$. Como $Q \in AI'_B$ y $PQBA$ es cíclico, entonces A, P y Q son colineales; por ende, si $\Phi(P) = P^*$, entonces C, R y P^* están alineados. Además, $\Phi(PABQ) = P^*BAR$, por lo que este último es cíclico.

Pasemos a la solución del inciso i). Sean O^* e I_C la reflexión de C en AB y el $C-$excentro de ABC, respectivamente. Sabemos que $\Phi(O) = O^*$ y $\Phi(I) = I_C$. Es suficiente probar que $P^*CO^*I_C$ es cíclico. Sea J la reflexión de I_C en AB. Es claro que CO^*I_CJ es un trapecio isósceles y por ende, cíclico. Tenemos que $\angle AJB = \angle AI_CB = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} = \angle I'_ACB = \angle ARB$, por tanto $ARJB$ es cíclico. Además, $\angle CRA = \angle CBI'_A = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} = \angle JBA$ por consiguiente, C, R, J son colineales, así $P^* = J$ y el primer resultado sigue. □

Prueba ii). Tenemos que $\triangle PCI \sim I_CCP^*$ y $\triangle PCO \sim \triangle O^*CP^*$, entonces $\frac{PI}{I_CP^*} = \frac{CI}{CP^*}$ y $\frac{PO}{O^*P^*} = \frac{CO}{CP^*}$. Dividiendo ambos expresiones obtenemos que $\frac{PI}{PO} \cdot \frac{O^*P^*}{I_CP^*} = \frac{CI}{CO}$, pero $O^*P^* = CI_C$, $\frac{CI}{CI_C} = \frac{r}{r_C}$, $P^*I_C = 2r_C$ y $CO = R$, por tanto,

$$R \cdot \frac{PI}{PO} = 2r$$

Usando que $OI^2 = R^2 - 2rR$, es sencillo obtener que $R^2 = OP \cdot OI$, i.e. P es el inverso de I con respecto a (ABC), luego $PX \cdot PY = PI \cdot PO$ (¿por qué?) y el cuadrilátero $XIOY$ resulta ser cíclico. Sea Z el punto de tangencia de XY y el incírculo, y W el punto medio de $\overline{XY}$, entonces,

$$OW = r \cdot \frac{OP}{OI} = \frac{Rr}{2r} = \frac{R}{2}$$

por consiguiente, $\cos \angle WOX = \dfrac{R/2}{R} = \dfrac{1}{2}$ y concluimos que $\angle WOX = 60^\circ$, por lo que,

$$\angle XIY = \angle XOY = 2\angle WOX = 120^\circ$$

como requeríamos.

4. Problemas propuestos

Advertencia: los problemas no están ordenados según su facilidad :). ¡Feliz resolución de problemas!

1. (ELMO 2013 SL, G3) En el triángulo ABC, un punto D yace sobre el lado BC. El circuncírculo de ABD corta a AC en F (distinto a A), y el circuncírculo de ADC corta a AB en E (distinto a A). Probar que, a medida que D varía, el circuncírculo de AEF siempre pasa por un punto fijo diferente de A, y que este punto fijo yace sobre la $A-$mediana de ABC.

2. (ELMO 2014, P5) Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H. Sean ω_1 y ω_2 los circuncírculos de los triángulos BOC y BHC, respectivamente. Suponga que el círculo con diámetro $\overline{AO}$ corta a ω_1 de nuevo en M, y la recta AM corta a ω_1 nuevamente en X. Similarmente, suponga que el círculo con diámetro $\overline{AH}$ interseca a ω_2 por segunda vez en N, y la recta AN corta a ω_2 por segunda vez en Y. Probar que $MN \parallel XY$.

3. (USA TST 2005, P6) Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno con O como su circuncentro. El punto P yace dentro del triángulo ABC con $\angle PAB = \angle PBC$ y $\angle PAC = \angle PCB$. El punto Q yace sobre la recta BC tal que $QA = QP$. Demostrar que $\angle AQP = 2\angle OQB$.

4. (Mathematical Reflections, O371) Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sean D, E los pies de alturas desde B, C a AC, AB, respectivamente. Sean M, N, P los puntos medios de los segmentos BC, MD, ME, respectivamente. La recta NP corta a BC de nuevo en S y la paralela por A a BC interseca a DE en T. Probar que ST es tangente al circuncírculo de ADE.

5. (ELMO 2012 SL, G7) Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O tal que $AB < AC$. Sea Q la intersección de la bisectriz externa del $\angle A$ con BC, y sea P un punto en el interior de ABC tal que $\triangle BPA \sim \triangle APC$. Muestre que $\angle QPA + \angle OQB = 90^\circ$.

6. (EGMO 2013, P5) Sea Ω el circuncírculo del $\triangle ABC$. El círculo ω es tangente a los lados AC y AB, y es internamente tangente al círculo Ω en P. Una paralela a AB que corta a ABC en su interior es tangente a ω en Q. Demostrar que $\angle ACP = \angle QCB$.

7. (IMO 1996, P2) Sea P un punto en el interior de un triángulo ABC tal que

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

Sean D, E los incentros de los triángulos APB y APC, respectivamente. Muestre que las rectas AP, BD, CE concurren.