Geometría Proyectiva para Olimpiadas Matemáticas

Academia Sabatina de Jóvenes Talento - Nicaragua

Jafet Baca

1. Razón cruzada

Una de las más importantes invarianzas en geometría es la razón cruzada, la cual, dados cuatro puntos alineados A, B, C, D, está definida como:

$$(A, C; B, D) = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DC}}$$

Notemos que las longitudes son tomadas como *dirigidas*; esto es, se considera una dirección cualquiera como positiva pero su opuesta será negativa. En particular, ocurre que $(A, C; B, D) > 0$ si los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ no poseen puntos en común o bien uno está contenido en el otro.

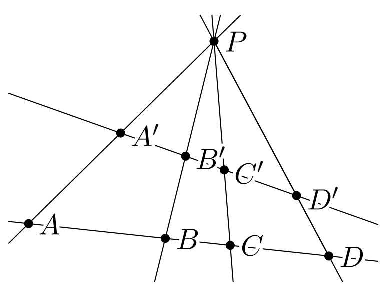
Definición 1

Sea P un punto no colineal con A, B, C, D. Entonces se dice que las rectas $PA,\ PB,\ PC,\ PD$ forman un *haz* de rectas y se simboliza como $P(A, C; B, D)$.

A partir de la definición anterior, podemos probar nuestro primer resultado:

Lema 1

Dado un haz de rectas $P(A, C; B, D)$ y otra recta l, supóngase que $\{A'\} = \overline{PA} \cap l$ y los puntos B', C' y D' se contruyen de forma análoga. Entonces $(A, C; B, D) = (A', C'; B', D)$.



Demostración. Aplicando el teorema de la bisectriz generalizado a $\triangle APC$ y $\triangle CPD$ con transversales $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$, respectivamente, obtenemos:

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\sin\angle APB}{\sin\angle BPC}; \quad \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{\overrightarrow{PD}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\sin\angle APD}{\sin\angle CPD} \therefore (A, C; B, D) = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{\sin\angle APB}{\sin\angle BPC} \cdot \frac{\sin\angle APD}{\sin\angle CPD}$$

¿Puedes ver por qué la última igualdad termina nuestra prueba? $\square$

El siguiente hecho relaciona circunferencias con haces de forma genial:

Lema 2

Sean A, B, C y D puntos sobre una circunferencia Γ en ese orden y P otro punto sobre Γ. Entonces

$$|P(A,C;B,D)| = \left|\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}\right|$$

Demostración. Usando la prueba del lema 1 y por la ley del seno en circunferencias deducimos que:

$$\left|\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}\right| = \left|\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle BPC} \cdot \frac{\sin\angle APD}{\sin\angle CPD}\right| = |(A,C;B,D)| = |P(A,C;B,D)|$$

□

Por supuesto, hay mucho más que decir sobre la razón cruzada, sin embargo, para nuestros propósitos lo anterior es suficiente.

2. División armónica

El caso más común de razón cruzada en problemas de olimpiada es cuando $(A,C;B,D) = -1$. En tal caso, diremos que los puntos A, B, C, D forman una *cuaterna armónica* o que A, C son conjugados armónicos de B, D y viceversa.

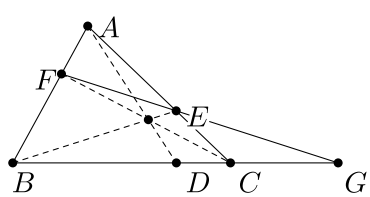
Definición 2

Sean A, B, C, D puntos colineales en ese orden. Entonces, si $\frac{BA}{BC} = -\frac{AD}{DC}$, diremos que la cuaterna $(A,C;B,D)$ es *armónica*.

En particular, el lema 1 antes descrito es cierto para puntos armónicos y es **sumamente útil**. El siguiente resultado nos muestra cómo construir el cuarto punto armónico si ya contamos con tres puntos.

Lema 3

Sea ABC un triángulo. Los puntos D, E y F yacen en los lados BC, CA y AB, respectivamente. La recta FE intersecta a BC en G. La cuaterna $(B,C;D,G)$ es armónica si y sólo si AD, BE y CF concurren.



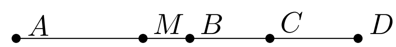
Demostración. Una aplicación simple de los teoremas de Ceva y Menelao nos permite deducir el resultado deseado. □

Las siguientes dos afirmaciones son fundamentales y sumamente útiles para resolver problemas de olimpiada:

Lema 4 (**Potencia en cuaternas armónicas**)

Si $(A, C; B, D) = -1$ y M es el punto medio de AC entonces:

1. $MA^2 = MC^2 = MB \cdot MD$ y,
2. $DC \cdot DA = DB \cdot DM$

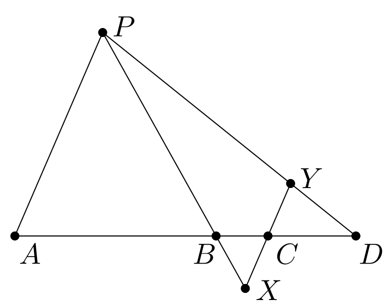


Demostración. Para la parte 1 tenemos $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$. Entonces $\frac{AM+MB}{MA-MB} = -\frac{MD+AM}{MD-MO}$. Multiplicar en cruz y sumar términos semejantes nos permiten deducir el resultado deseado. El segundo resultado se deduce usando 1 y efectuando las manipulaciones pertinentes. Se deja como ejercicio al lector. □

Dato importante: La ocurrencia de uno de los dos resultados previos implica que la cuaterna con la que estamos trabajando sea armónica. La demostración de lo anterior es completamente inversa a la empleada en el lema 4, según sea el caso.

Lema 5

Un haz $P(A, C; B, D)$ es dado. La paralela a PA por B corta a PB y PD en X and Y, respectivamente. Luego, C es el punto medio del segmento XY si y sólo si $(A, C; B, D) = -1$.



Demostración. Usaremos que si M es el punto medio del segmento AB y P_∞ es el punto al infinito (tomado como el punto de intersección de dos rectas paralelas en un plano proyectivo), entonces $(M, P_\infty; A, B) = 1$ (¿por qué?). En esta situación, primero asumamos que $(A, C; B, D) = -1$ y $\{P_\infty\} = \overline{PA} \cap \overline{XY}$, entonces, por el lema 1, es claro que $(X, Y; C, P_\infty) = 1$, por lo que $CX = CY$. Tomando la dirección inversa de la prueba nos permite inferir el recíproco del lema. □

2.1. Cuadriláteros armónicos

Definición 3

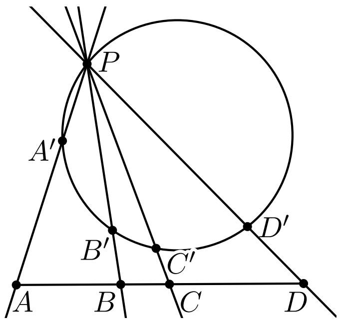
Un cuadrilátero $ACBD$ es **armónico** si y solo si los dos productos determinados por sus lados opuestos son iguales, es decir $AC \cdot BD = CB \cdot AD$.

Veamos por qué lo anterior es cierto usando el siguiente hecho:

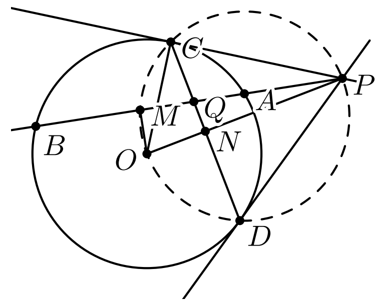
Lema 6

Sea $(A, C; B, D) = -1$ y P un punto no colineal con ellos. Sea Γ una circunferencia que pasa por P. Si $\{A'\} = \overline{PA} \cap \Gamma$ y los puntos B', C', D' se definen de manera análoga, entonces $A'B'C'D'$ es armónico.

Para demostrar esta aserción se utiliza el hecho a continuación.



(a) Lema 6.



(b) Lema 7.

Demostración. Por el lema 2, es claro que $1 = |P(A, C; B, D)| = \left|\frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}\right|$. El resultado es inmediato. $\square$

Lema 7

Un punto P se encuentra en el exterior de una circunferencia Γ. Las rectas PC y PD son tangentes a Γ y l una recta que pasa por P y que interseca a Γ en A y B, de modo que P, A y B son colineales en este orden. Sea Q el punto de intersección de AB y CQ. Luego el cuadrilátero $ACBD$ es armónico y la cuaterna $(P, Q; A, B)$ es armónica.

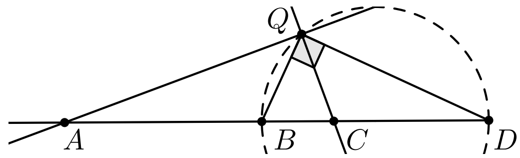
Demostración. Veamos que $\triangle CAP \sim \triangle BCP$, $\triangle DAP \sim \triangle BDP$, luego $\frac{AC}{BC} = \frac{PC}{PB} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{BD} \therefore AC \cdot BD = BC \cdot AD$, por lo que $ACBD$ es armónico. Sea M el punto medio de AB y O el centro de Γ, entonces $\angle OMP = 90° = \angle ODP = \angle OCP$, por lo que $PCMOD$ es cíclico. Por el segundo resultado del lema 4, es suficiente probar que $PM \cdot PQ = PA \cdot PB = PC^2 = PB^2 = NP \cdot PO$, por ser $\angle DNP = 90°$ y el $\triangle ODP$ recto en S, con N punto medio de CD; pero $\angle DNO = 90° = \angle OMQ$, por lo que $QMON$ es cíclico y por ende $PQ \cdot PM = NP \cdot PO$. $\square$

2.2. Círculos de Apolonio

Lema 8

Los puntos A, B, C, D están alineados en este orden. Sea Q un punto fuera de la recta AD. Luego dos de las siguientes condiciones implican la tercera:

1. $(A, C; B, D)$ es una cuaterna armónica.
2. QB es la bisectriz interior del ángulo $\angle AQC$.
3. DQ es perpendicular a QB.



Demostración. Trivial. Una aplicación directa del teorema de la bisectriz y de la definición 2. □

Definición 4

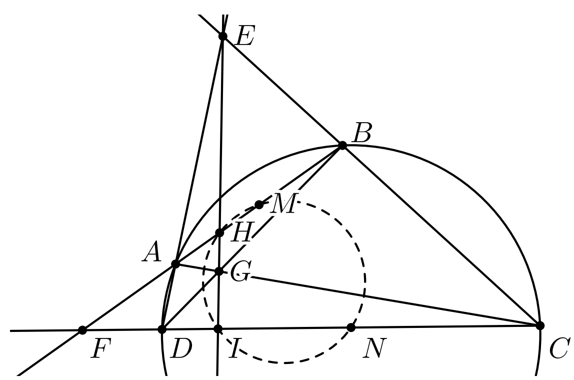
El circuncírculo del triángulo $\triangle BQD$ es el **círculo de Apolonio** con respecto al segmento AB y es el lugar geométrico del punto Q del cual la razón de sus distancias a dos puntos dados A y C es constante.

Después de los lemas anteriores, debemos resolver problemas para demostrar la utilidad de la división armónica. Veamos algunos de ellos en la siguiente sección.

2.3. Problemas resueltos

Problema 1

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y se definen los puntos $\{G\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $\{E\} = \overline{AD} \cap \overline{BC}$, $\{F\} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $\{H\} = \overline{EG} \cap \overline{AB}$, $\{I\} = \overline{EG} \cap \overline{CD}$. Sean M y N los puntos medios de los segmentos AB y CD. Demostrar que $HMNI$ es cíclico.



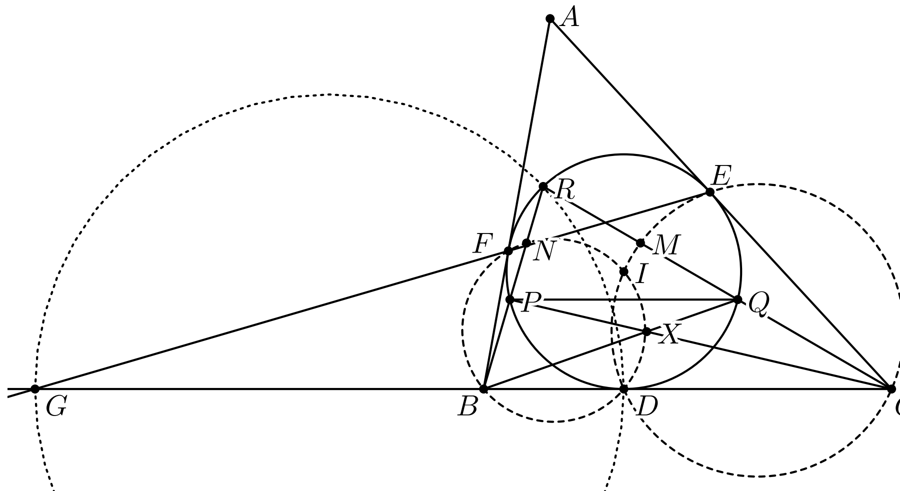
Solución. Por el lema 3, es claro que $-1 = (F, H; A, B) \stackrel{E}{=} (F, I; D, C)$ y por el resultado 2 del lema 4, obtenemos que:

$$FH \cdot FM = FA \cdot FB = FD \cdot FC = FI \cdot FN$$

por ende, el cuadrilátero $HMNI$ es cíclico. □

Problema 2

(OIM 2010, Problema 3) La circunferencia Γ inscrita al triángulo escaleno ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. La recta EF corta a la recta BC en G. La circunferencia de diámetro GD corta a Γ en R ($R \neq D$). Sean P y Q ($P \neq R, Q \neq R$) las intersecciones de BR y CR con Γ, respectivamente. Las rectas BQ y CP se cortan en X. La circunferencia circunscrita a CDE corta al segmento QR en M y la circunferencia circunscrita a BDF corta al segmento PR en N. Demostrar que las rectas PM, QN y RX son concurrentes.

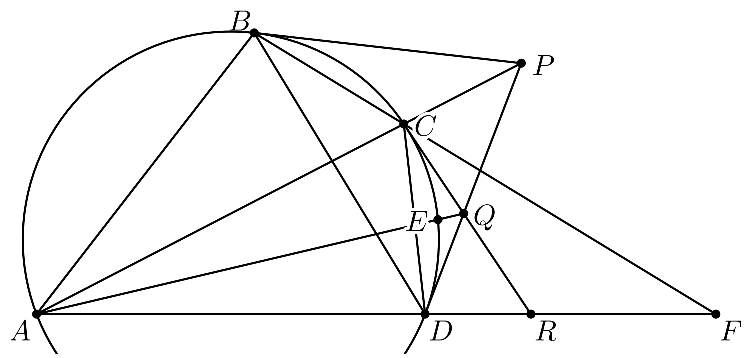


Solución. Sabemos que AD, BE y CF concurren en el punto de Gergonne del $\triangle ABC$, luego, por el lema 3, tenemos $(G, D; B, C) = -1$. Por el lema 8, la circunferencia de diámetro GD es el círculo de Apolonio del segmento DC y así RD es bisectriz del $\angle BRC$, entonces $\angle DPQ = \angle DRQ = \angle DRP = \angle BDP$ y deducimos que $PQ \parallel BC$. Notemos que $\{P_\infty\} = \overline{PQ} \cap \overline{BC}$, entonces $(C, B; \overline{RX} \cap \overline{BC}, P_\infty) = 1$, por tanto $\overline{RX} \cap \overline{BC}$ es el punto medio de BC y como $PQ \parallel BC$, RX pasa por el punto medio de PQ y es mediana del $\triangle RPQ$. Observemos que el circuncírculo del $\triangle CDE$ tiene diámetro CI, con I el incentro del $\triangle ABC$, entonces $\angle IMC = 90°$ y como RQ es cuerda del incírculo, se tiene que M es punto medio de RQ. Análogamente, N es punto medio de PR, por consiguiente, RX, PM, QN son medianas del $\triangle RPQ$ y concurren en el baricentro de tal triángulo. $\square$

Problema 3

(APMO 2013, Problema 5) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico inscrito en ω y sea P un punto en la prolongación de AC tal que PB y PD son tangentes a ω. La tangente en C corta a PD en Q y a AD en R. Sea E el segundo punto de corte de AQ y Γ. Probar que B, E y R son colineales.

Solución. Por el lema 7, de antemano sabemos que $ABCD$ y $ADEC$ son cuadriláteros armónicos. Entonces, si consideramos el haz $C(A, C; B, D)$ y sus correspondientes puntos de intersección con la recta AD, obtendremos que $(A, R; D, F) = -1$, donde $\{F\} = \overline{BC} \cap \overline{AD}$. Ahora, considerando el haz $B(A, R; D, F)$ y sus respectivos puntos de corte con ω, concluimos que $ADE'C$ es un cuadrilátero armónico, con $\{E'\} = \overline{BR} \cap \omega$, por ende $E = E'$ y el resultado sigue. $\square$



2.4. Problemas propuestos

1. (OIM 2015) En el triángulo acutángulo ABC, el punto D es el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC. Sea P un punto en el segmento AD. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD respectivamente. Demuestre que $\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}$.

2. (Sharygin 2017, Ronda final, Grado 10) Sean BB', CC' de un triángulo acutángulo ABC. Dos círculos que pasan por A y C' son tangentes a BC en P y Q. Demostrar que A, B', P, Q son concíclicos.

3. AD es una altura del triángulo acutángulo ABC. Sea P un punto arbitrario sobre AD. Las rectas BP, CP intersectan a los lados AC, AB en M, N, respectivamente. MN intersecta a AD en Q. F es un punto arbitrario sobre el lado AC. FQ y CN se cortan en E. Demuestre que $\angle FDA = \angle EDA$.

4. (OMCC 2016, Problema 2, Jafet Baca) Sea ABC un triángulo acutángulo, Γ su circuncírculo y M el punto medio de BC. Sea N un punto en el arco BC de Γ que no contiene a A tal que $\angle NAC = \angle BAM$. Sea R el punto medio de AM. Demostrar que R, S, T son colineales.

5. (Sharygin 2016, Ronda final, Grado 10) Un triángulo ABC es dado. El punto K es el pie de la bisectriz externa del ángulo A. El punto M es el punto medio del arco AC del circuncírculo. El punto N está sobre la bisectriz del ángulo C y cumple que $AN \parallel BM$. Probar que M, N, K son colineales.

6. (OMM 2015) Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del tríangulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Muestra que los puntos D, J y E son colineales.

7. (IMO SL 1995) Sea ABC un triángulo y sean D, E, F los puntos de tangencia del incírculo del $\triangle ABC$ con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Sea X un punto en el interior del $\triangle ABC$ tal que el incírculo del $\triangle XBC$ toca a XB, XC y BC en Z, Y y D, respectivamente. Probar que el cuadrilátero $EFZY$ es cíclico.

8. (China TST 2002) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Se construyen los puntos $E = AB \cap CD, F = AD \cap BC, P = AC \cap BD$, y sea O el pie de la perpendicular desde P a la recta EF. Demostrar que $\angle BOC = \angle AOD$.

9. (JBMO 2007 Romanian TST) Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle A = 90^\circ$ y sea D un punto sobre el lado AC. Denote por E la reflexión de A con respecto a la recta BD y F la intersección de CE con la perpendicular a BC en D. Demostrar que las rectas AF, DE y BC son concurrentes.

10. (Sharygin 2017, Ronda de Correspondencia, Grado 10) Sea ABC un triángulo acutángulo con incírculo ω e incentro I. ω toca a AB, BC, CA en D, E, F respectivamente. Los círculos ω_1 y ω_2 centrados en J_1 y J_2, respectivamente están inscritos en $ADIF$ y $BDIE$. Sea $\{M\} = \overline{J_1J_2} \cap \overline{AB}$. Probar que $CD \perp IM$.

11. (APMO 2012, Problema 4) Sea ABC un triángulo acutángulo. Denote por D el pie de altura desde A, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. Sea E el punto de intersección del circuncírculo Γ de ABC con la semirrecta MH, y F el punto de intersección distinto de E de la recta ED y Γ. Probar que $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

12. (IMO 2004 SL, Problema G8) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, M el punto medio del lado CD y N un punto sobre el circuncírculo del triángulo ABM, tal que $N \neq M$ y $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Si $\{E\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $\{F\} = \overline{BC} \cap \overline{AD}$, demostrar que E, F, N son colineales.

13. (IMO 2010, Problema 4, generalizado) El punto P yace dentro del $\triangle ABC$. Las rectas AP, BP, CP cortan al circuncírculo del $\triangle ABC$ en K, L, M, respectivamente. La tangente al circuncírculo en C corta a AB en S. Probar que $SC = SP$ si y sólo si $MK = ML$.

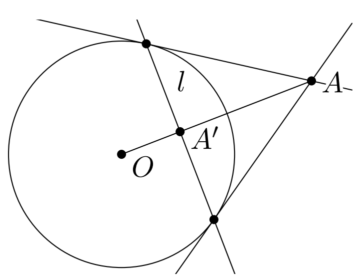
14. (IMO 2005 SL, Problema G6) La mediana AM del triángulo ABC interseca a su incírculo ω en K y L. Las paralelas por K y L a BC cortan a ω de nuevo en X y Y. Las rectas AX y AY cortan a BC en P y Q. Probar que $BP = CQ$.

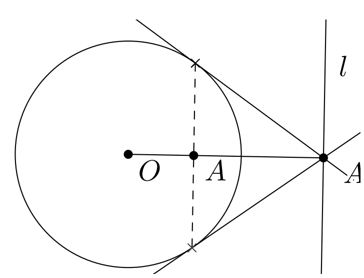
15. (IMO 2016 SL, Problema G2) Sea ABC un triángulo con circuncírculo Γ e incentro I. Sea M el punto medio del lado BC. Denote por D el pie de la perpendicular desde I al lado BC. La recta por I perpendicular a AI corta a los lados AB y AC en F y E, respectivamente. Suponga que el circuncírculo del triángulo AEF corta a Γ en un punto X distinto de A. Demostrar que XD y AM se cortan en Γ.

3. Polos y Polares

Definición 5

Dada una circunferencia Γ cuyo centro es O, radio r, un punto $A \neq O$ y otro punto A' sobre la semirrecta OA tal que $OA \cdot OA' = r^2$, entonces la recta l que pasa por A' y es perpendicular a OA es la *polar* de A con respecto a Γ. A su vez, A es llamado el *polo* de l con respecto a Γ.





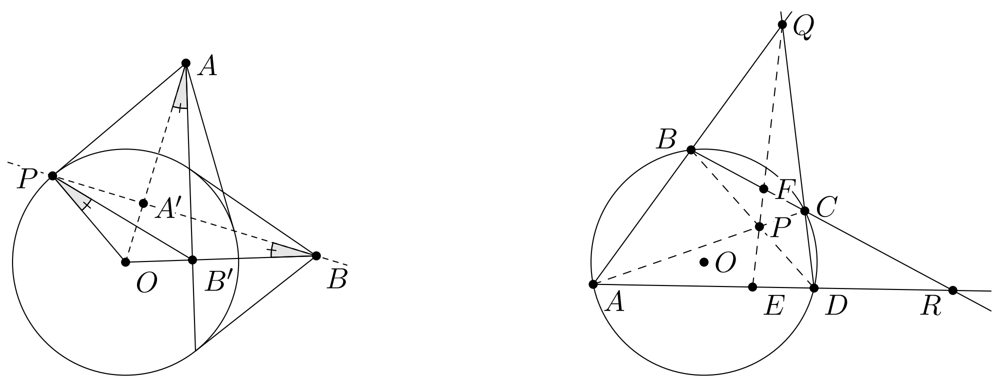
Ejercicio 1. Construir con regla y compás la polar de A con respecto a Γ cuando se encuentra fuera o dentro de la misma. ¿Qué ocurre cuando A yace sobre Γ?

3.1. Resultados útiles

Lema 9 (La Hire)

Un punto A se encuentra sobre la polar de un punto B con respecto a Γ. Entonces B también se encuentra sobre la polar de A con respecto a Γ.

Demostración. Supondremos que A y B yacen fuera de una circunferencia Γ. Se deja como detalle al lector verificar que el teorema se cumple para las otras posibles configuraciones de los puntos A y B.[1] Sea AP una tangente trazada a la circunferencia dada y O su centro. Es suficiente demostrar que $OA \perp PB$. Supongamos que B' es el punto de intersección de la polar de B con la recta OB y que $\overline{BP} \cap \overline{AO} = \{A'\}$ Notemos que $\angle AB'B = 90°$ y que $OP^2 = OB' \cdot OB$, luego OP es tangente al circuncírculo del triángulo $PB'B$ y entonces $\angle OPB' = \angle PBB'$. Además el cuadrilátero $APOB'$ es cíclico, por lo que se obtiene que $\angle B'AA' = \angle B'PO = \angle A'BB'$; es decir, el cuadrilátero $AA'B'B$ es cíclico y esto termina la solución. $\square$



(a) Teorema de La Hire (b) Teorema de Brocard

Lema 10 (Brocard)

Los puntos A, B, C y D se encuentran en este orden sobre una circunferencia Γ con centro O. Se construyen los puntos $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{P\}$, $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{Q\}$ y $\overline{BC} \cap \overline{AD} = \{R\}$. Luego O es el ortocentro de $\triangle PQR$. Además QR, PQ y PR son las polares de P, R y Q, respectivamente.

Demostración. Sea $\{F\} = \overline{PQ} \cap \overline{BC}$, $\{E\} = \overline{PQ} \cap \overline{AD}$. Por el lema 3 $(A, D; E, R) = -1$, por lo que el haz $Q(A, D; E, R)$ es armónico, luego $(B, C; F, R) = -1$. Por el lema 7 , deducimos que QP es la polar de R. Análogamente, PR es la polar de Q y RQ es la polar de P. Por propiedades de los polos y las polares es claro que $OR \perp PQ, OP \perp QR, OQ \perp PR$, por tanto O es el ortocentro del $\triangle PQR$. $\square$

Ejercicio 2. Demuestre que los puntos O, P, Q y R forman un grupo ortocéntrico.

Lema 11

Las polares de todos los puntos que se encuentran sobre una misma recta con respecto a Γ concurren en el polo de tal recta.

[1] El uso de ángulos dirigidos puede librarnos de examinar los demás casos.

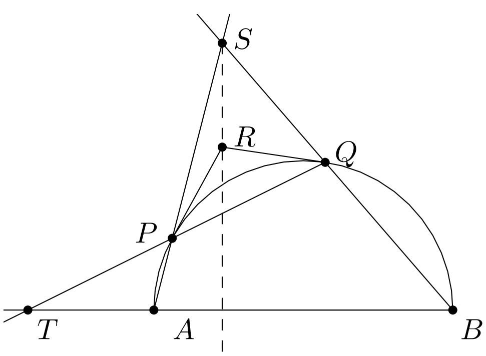
Demostración. Sea l la recta en cuestión y P su polo con respecto a Γ. Sea $D \in l$ tal que $OD \perp l$ entonces O, P, D están alineados, y sea $M \neq D$ un punto arbitrario sobre l. Sea $E \in OM$ tal que $PE \perp OM$. El cuadrilátero $DPEM$ es cíclico, luego $OE \cdot OM = OP \cdot OD = r^2$ por tanto PE es la polar de M. Ya que M es un punto cualquiera, el resultado debe cumplirse para todo punto sobre la recta l y el resultado sigue. □

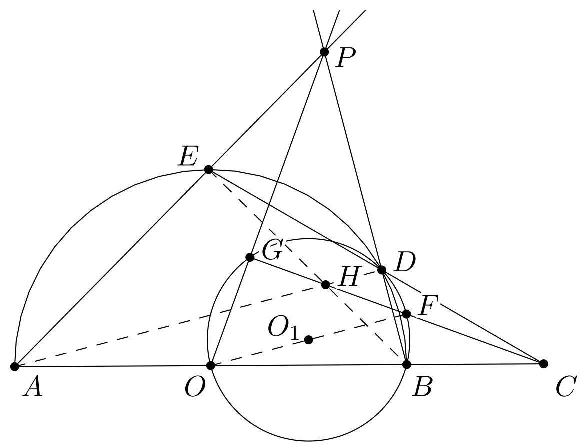
3.2. Problemas resueltos

Problema 4

Sea Γ una semicircunferencia con diámetro AB. P y Q son dos puntos sobre dicha semicircunferencia tales que $AP < AQ$. Las tangentes al semicírculo en P y Q se cortan en R. Si $\{S\} = \overline{AP} \cap \overline{BQ}$, pruebe que $RS \perp AB$.

Solución. Por el teorema de Brocard, sabemos que la polar de T con respecto a Γ pasa por S. Notemos que PQ es la polar de R y ya que T yace sobre PQ, debe suceder que la polar de T pasa por R. Luego la recta RS es la polar de T. Ya que T pertenece a la prolongación del diámetro AB, por definición de polar se obtiene que $RS \perp AB$. □





Problema 5

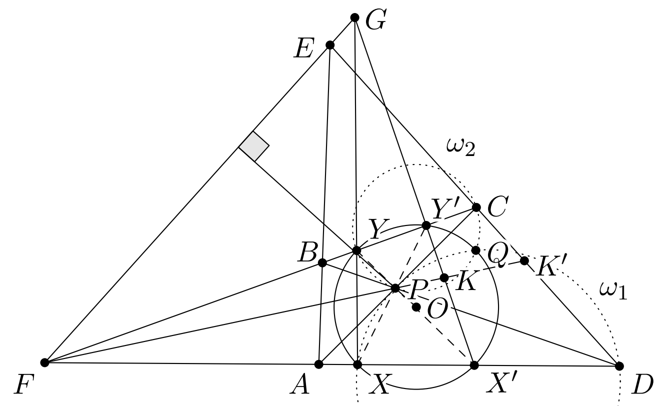
Sea AB un diámetro de una circunferencia con centro O. C se encuentra sobre la prolongación de AB más allá de B. Una recta que pasa por C corta a la circuncírculo del $ABCD$ en D, E. OF es un diámetro del circuncírculo del $\triangle BOD$ cuyo centro es O_1. CF corta al circuncírculo del $\triangle BOD$ de nuevo en G. Demostrar que O, A, E, G son concíclicos.

Solución. Sea $\{P\} = \overline{AE} \cap \overline{BD}$. Es suficiente probar que OG pasa por P. Sea $\{H\} = \overline{BE} \cap \overline{AD}$. Sabemos que CH es la polar de P con respecto al circuncírculo del $ABCD$, luego $CH \perp PO$. Sea $\{G'\} = \overline{CH} \cap \overline{OP}$. Observemos que $\angle PEH = \angle PDH = \angle PG'H = 90°$, de donde concluimos que los puntos P, E, G', G, D son concíclicos, a su vez resulta que los puntos G', O, B, D son cíclicos. Luego, si $G \neq G'$, se tendría que la circunferencia cuyo diámetro es OC posee tres puntos de intersección con el circuncírculo del triángulo BOD, absurdo, por lo que $G = G'$. □

Problema 6

(IGO 2016, Nivel Avanzado, Problema 4) En un cuadrilátero convexo $ABCD$, $\{E\} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $\{F\} = \overline{AD} \cap \overline{BC}$, $\{P\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. ω_1 es una circunferencia que pasa por D y es tangente a AC en P; ω_2 es una circunferencia que pasa por C y es tangente a BD en P. Se definen los puntos $\{X\} = \omega_1 \cap \overline{AD}$, $\{Y\} = \omega_2 \cap \overline{BC}$, $\{Q\} = \omega_1 \cap \omega_2$ $(P \neq Q)$. Pruebe que la perpendicular de P a la recta EF pasa por el circuncentro del triángulo XQY.

Solución. Sea $\{Y'\} = \overline{XP} \cap \overline{BC}$, $\{X'\} = \overline{YP} \cap \overline{AD}$, $\{G\} = \overline{XY} \cap \overline{X'Y'}$. Observemos que $\angle YY'X = \angle YY'P = \angle Y'CP + \angle Y'PC = \angle YQP + \angle APX = \angle YPB + \angle PDX = \angle X'PD + \angle PDX' = \angle PX'X = \angle YX'X$, además $\angle YQX = \angle YCP + \angle PDX$ $\therefore$ $\angle YY'X = \angle YQX = \angle YX'X$, luego los puntos Y, Y', Q, X', X son concíclicos. Entonces veamos que es suficiente demostrar que F, E, G están alineados, pues FG es la polar de P con respecto al circuncírculo del $XYY'QX'$ y por ende la recta que une P con su centro O será perpendicular a FG . Supongamos que $\{K\} = \overline{FP} \cap \overline{X'Y'}$, $\{K'\} = \overline{FP} \cap \overline{CD}$. Notemos que $(X', Y'; K, G) = 1 = (D, C; K', E)$, por lo que las rectas $GE, CY', K'K, DX'$ deben concurrir, y dicho punto de concurrencia es F. $\square$



3.3. Problemas propuestos

1. Sean P y Q puntos sobre una circunferencia Γ de modo que las tangentes a Γ por ambos puntos son paralelas. Estas tangentes cortan a la tangente trazada a Γ por otro punto R que yace sobre ella en los puntos S, T. Además la recta PQ corta a la tangente por R a Γ en U. Si V es el punto de intersección de PT y QS, pruebe que RV es la polar de U con respecto a Γ.

2. Sea I el incentro del y suponga que las rectas perpendiculares trazadas por I a IA, IB, IC cortan a una tangente dada a la circunferencia inscrita en P, Q, R. Demuestre que AP, BQ y CR concurren.

3. (Olimpiada Checa-Eslovaca 1998, un clásico) Un punto A se encuentra fuera de un círculo k en el plano. Muestre que las diagonales de cualquier trapecio inscrito en k, de modo que las extensiones de cuyos lados no paralelos se intersectan en A, se cortan en un punto independiente de la opción del trapecio.

4. Puntos distintos A, B, C, D, E, F yacen en una circunferencia en ese orden. Las tangentes a la circunferencia por los puntos A y D, y las rectas BF y CE son concurrentes. Muestre que las rectas AD, BC, EF son paralelas o concurrentes.

5. (Rumania TST 2004) El incírculo de un triángulo ABC no isósceles es tangente a los lados BC, CA, AB en A', B', C'. Las rectas AA', BB' se cortan en P, AC y $A'C'$ en M y $B'C'$ y BC en N. Pruebe que $IP \perp MN$.

6. (Irán TST 2007) El incírculo ω de ABC es tangente a AC, AB en E, F, respectivamente. Los puntos P, Q se encuentran sobre AB, AC tal que PQ es paralela a BC y tangente a ω . Demostrar que si M es el punto medio de PQ y T el punto de intersección de EF y BC, entonces TM es tangente a ω.

7. (OMCC 2015, modificado) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB < CD$, y sea P el punto de intersección de la rectas AD y BC. El circuncírculo del triángulo PCD corta a la recta AB en puntos Q y R. Sean S y T los puntos donde las tangentes desde P al circuncírculo del $ABCD$ tocan a dicha circunferencia. Probar que $QRST$ es un cuadrilátero cíclico.

8. (OIM 2015 SL, un resultado muy útil y conocido (¿?)) El incírculo del $\triangle ABC$ toca a los lados BC, CA, AB en D, E, F, respectivamente. Sea I el incentro de ABC y M el punto medio de BC. Demuestra que EF, DI, AM concurren.

9. (APMO 2016, Problema 3) Sean AB y AC dos rayos distintos que no yacen en una misma recta, y sea ω una circunferencia con centro O que es tangente al rayo AC en E y al rayo AB en F. Sea R un punto sobre el segmento EF. La recta que pasa por O paralela a EF corta a AB en P. Sean $\{N\} = \overline{PR} \cap \overline{AC}$, y M el punto de intersección de AB con la paralela por R paralela a AC. Probar que MN es tangente a ω.

10. (Sharygin 2017, Ronda de Correspondencia, Grado 10) Una recta m es tangente al incírculo del $\triangle ABC$. Las rectas que pasan por el incentro I y son perpendiculares a AI, BI, CI cortan a m en A', B', C', respectivamente. Probar que AA', BB', CC' concurren.

11. (USA TSTST 2016, Problema 2) Sea ABC un triángulo escaleno con ortocentro H y circuncentro O. Sean M y N los puntos medios de AH, BC. Suponga que el círculo γ con diámetro AH corta al circuncírculo de ABC en $G \neq A$ y corta a la recta AN en $Q \neq A$. La tangente a γ en G corta a la recta OM en P. Demostrar que los circuncírculos de $\triangle GNQ$ y $\triangle MBC$ se cortan en un punto T sobre NP.

12. (OIM 2016, Problema 3) Sea ABC triángulo acutángulo y Γ su circuncírculo. Las tangentes a Γ por B y C se cortan en P. Sea M un punto en el arco AC que no contiene a B tal que $M \neq A$ y $M \neq C$, y $\{K\} = \overline{BC} \cap \overline{AM}$. Sea R el simétrico de P respecto a AM y $\{Q\} = \overline{RA} \cap \overline{PM}$. Sea J el punto medio de BC y L el punto de intersección de PJ con la paralela por A a PR. Demostrar que L, J, A, Q, K yacen sobre una misma circunferencia.

13. (Pre-IMO 2017 Nicaragua, Problema 2) Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo (O). Suponga que E y K son puntos de intersección de AB con CD y AC con BD, respectivamente y O no pertenece a la recta KE. Sean G y H los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Sea (I) el circuncírculo del $\triangle GKH$. Sean M, N puntos de intersección entre (I) y (O) tales que $MGHN$ es un cuadrilátero convexo. Sea P la intersección de MG y HN, Q la intersección de MN y GH. Probar que $IK \parallel OE$ y que $PK \perp IQ$.

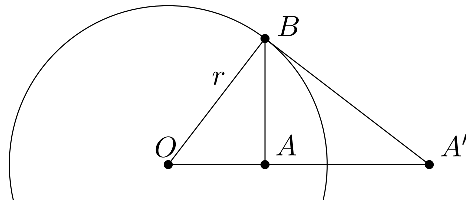
14. (USA 2013 TST, Problema 3) Sea ABC un triángulo escaleno con $\angle BCA = 90°$ y D el pie de altura desde C. Sea X un punto sobre el segmento CD. Sea K un punto sobre el segmento AX tal quue $BK = BC$. Similarmente, sea L un punto sobre el segmento BX tal que $AL = LC$. El circuncírculo del triángulo DKL corta al segmento AB en un segundo punto $T \neq D$. Demostrar que $\angle ACT = \angle BCT$.

4. Inversión

Definición 6

Dada una circunferencia Γ de centro O y radio r, la inversión de centro O y radio r es una transformación del plano que asigna a cada punto A distinto de O otro punto A', de modo que yacen a un mismo lado con respecto a O y satisfacen la siguiente relación fundamental:

$$OA \cdot OA' = r^2$$



La figura anterior muestra una manera de construir el punto inverso de A cuando se encuentra en el interior de la circunferencia de inversión. En efecto, a la recta OA se le traza una perpendicular por A de modo que corte a la circunferencia en B. Por este punto dibujamos una tangente que corta a la semirrecta OA en A', el punto inverso deseado. Ya que $\angle OBA = 90°$, aplicando el teorema del cateto fácilmente se obtiene $OA \cdot OA' = r^2$. De forma inversa a la construcción dada, podemos determinar el punto inverso de A cuando es exterior a Γ.

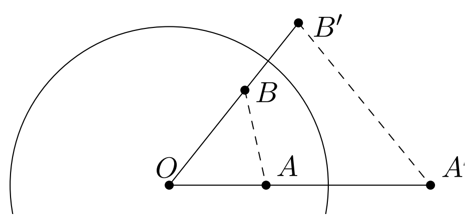
Veamos entonces que un punto exterior a la circunferencia de inversión Γ se transforma en un punto interior a ella y viceversa y que además puntos sobre Γ coinciden con sus propios inversos. En lo que corresponde a O, se asume que su inverso es el punto al infinito P_∞.

4.1. Inversión y distancias

Lema 12

Sean A y B dos puntos distintos y sean A' y B' sus puntos inversos respecto a Γ. Luego:

$$A'B' = \frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}$$



Demostración. Ya que $OB \cdot OB' = r^2 = OA \cdot OA'$ deducimos que $\frac{OB'}{OA'} = \frac{OB}{OA}$ y puesto que comparten el ángulo $\angle A'OB'$, concluimos que $\triangle AOB \sim \triangle B'OA'$, por tanto:

$$A'B' = \frac{AB \cdot OB'}{OA} = \frac{OB' \cdot OB \cdot AB}{OA \cdot OB} = \frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}$$

como lo requeríamos. $\square$

4.2. Inversión y rectas

Lema 13

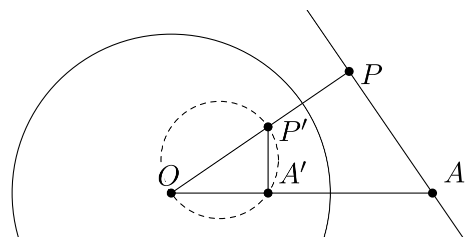
La imagen de una recta que pasa por el centro de inversión O coincide con ella misma.

Demostración. Trivial. Se recomienda como ejercicio al lector. □

Lema 14

La imagen de una recta que no pasa por el centro de inversión O es una circunferencia con diámetro OP', donde P es la proyección ortogonal de O sobre la recta y P' el punto inverso de P.

Demostración. Sea A un punto arbitrario sobre la recta a invertir y A' su inverso. Dado que $OP' \cdot OP = r^2 = OA' \cdot OA$, el cuadrilátero $PP'A'A$ debe ser cíclico, así que $\angle P'A'O = 90°$ y de aquí inferimos que el lugar geométrico de A' es la circunferencia con diámetro OP. □

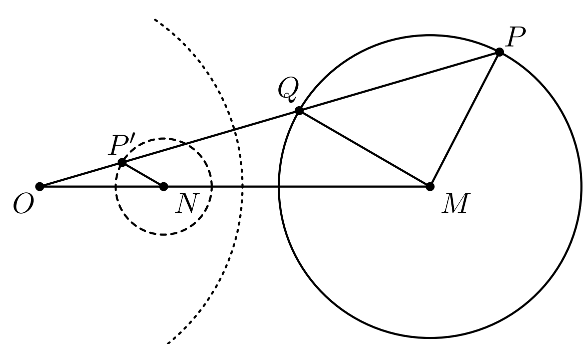


4.3. Inversión y circunferencias

La gráfica anterior nos permite visualizar lo que ocurre si deseamos invertir una circunferencia que pasa por el centro de inversión O. Si OP' es un diámetro de la circunferencia a invertir, entonces esta circunferencia se transforma en la recta perpendicular a OP' por P, el punto inverso de P'. Veamos qué sucede en el caso contrario.

Lema 15

El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión O es la circunferencia con diámetro $A'B'$, donde A' y B' son los inversos de A y B, respectivamente, con A y B puntos de intersección de la recta que une O y el centro de la circunferencia a invertir.



Demostración. Supongamos que la circunferencia ω a invertir tiene radio k y centro M. Sean P un punto arbitrario sobre ω, P' su inverso respecto a Γ y Q el segundo punto de intersección de OP con ω. Sabemos que $OP \cdot OP' = r^2$ y por potencia de puntos tenemos que $OP \cdot OQ = |OM^2 - k^2|$. Luego

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{r^2}{|OM^2 - k^2|}$$

lo cual es constante. Tracemos la paralela a QM por P' y sea N su punto de intersección con OM. Es claro que

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{NP'}{MQ} = \frac{ON}{OM}$$

Por ende,

$$ON = OM \cdot \frac{OP'}{OQ} = \frac{OM \cdot r^2}{|OM^2 - k^2|}$$

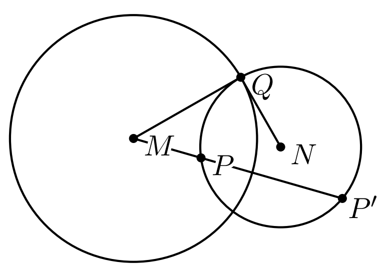
$$NP' = MQ \cdot \frac{OP'}{OQ} = \frac{k \cdot r^2}{|OM^2 - k^2|}$$

las que también son constantes, por lo que N no depende de la elección de P. Siendo así, concluimos que el lugar geométrico del inverso del punto P es una circunferencia con centro N y radio $\frac{k \cdot r^2}{|OM^2 - k^2|}$. □

4.4. Ortogonalidad e inversión

Definición 7

Dos circunferencias que se intersecan en dos puntos distintos son ortogonales si el ángulo formado por los radios que unen un punto de intersección es recto.



En la figura anterior, las circunferencias con centros M y N son ortogonales ya que $\angle MQN = 90°$. Ahora bien, consideremos un punto P sobre $O(N, NQ)$ y sea P el punto de intersección de MP' con $O(M, MQ)$. Entonces la potencia de M con respecto a $O(N, NQ)$ es $MQ^2 = MP \cdot MP'$, por lo que P es el inverso de P' con respecto a $O(M, MQ)$, es decir

Lema 16

Si dos circunferencias son ortogonales, la imagen de cualquiera de ellas bajo una inversión con respecto a la otra es ella misma.

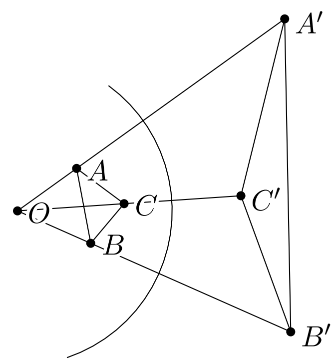
Recíprocamente, si una circunferencia contiene a P y P', donde P' es el inverso de P con respecto a otra circunferencia, resulta que ambas circunferencias son ortogonales.

4.5. Inversión y ángulos

Lema 17

Si A', B', C' son los inversos de los puntos A, B, C, respectivamente y O es el centro de inversión, entonces:

$$\measuredangle ABC + \measuredangle A'B'C' = \measuredangle AOC$$



Recordemos que la notación $\measuredangle ABC$ indica el ángulo que debe girar la recta AB en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj hasta que sea paralela a la recta BC (ángulos dirigidos), tomado módulo $180°$.

Demostración. Obsevemos que

$$\measuredangle ABO = \measuredangle OA'B' = \measuredangle A'OB' + \measuredangle OB'A'$$

Por otro lado

$$\measuredangle OBC = \measuredangle B'C'O = \measuredangle C'BO' + \measuredangle B'OC'$$

Sumando,

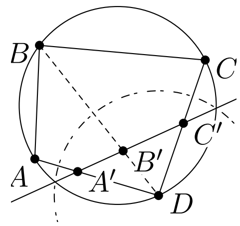
$$\begin{aligned}
\measuredangle ABC &= \measuredangle ABO + \measuredangle OBC \\
&= (\measuredangle A'OB' + \measuredangle OB'A') + (\measuredangle C'B'O + \measuredangle B'OC') \\
&= (\measuredangle A'OB' + \measuredangle B'OC') + (\measuredangle C'B'O + \measuredangle OB'A') \\
&= \measuredangle A'OC' + \measuredangle C'B'A' \\
&= \measuredangle AOC - \measuredangle A'B'C'.
\end{aligned}$$

□

4.6. Problemas Resueltos

Problema 7 (Ptolomeo)

Para cuatro puntos concíclicos A, B, C y D se tiene que $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.



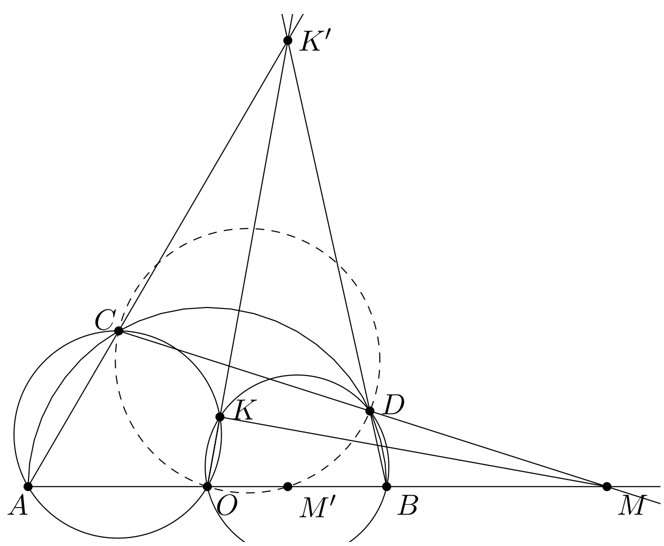
Solución. Consideremos una inversión con centro D y radio cualquiera r. Luego el circuncírculo del cuadrilátero $ABCD$ se transforma en la recta que pasa por A', B' y C'. Observemos que $A'C' = A'B' + B'C'$; por consiguiente, usando el lema 10 obtenemos que:

$$AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC} = AB \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DB} + BC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC}$$

Multiplicando por $\frac{AD \cdot BD \cdot CD}{r^2}$ obtenemos la expresión deseada. Podemos revertir los pasos para probar que si la expresión pedida es cierta, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. ☐

Problema 8

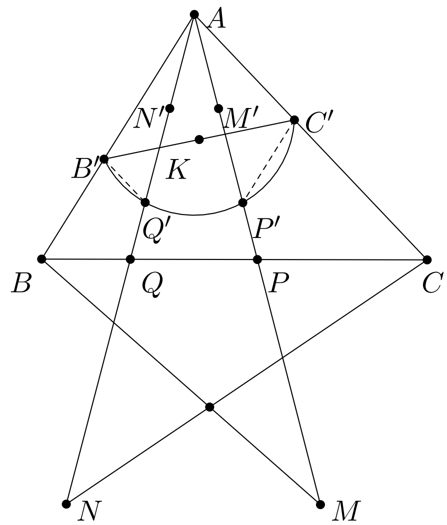
(Rusia 1995) Considere una semicircunferencia con diámetro AB y centro O. Una recta secante a esta semicircunferencia la corta en dos puntos C y D y a la recta AB en M ($MD < MC$, $MB < MA$). Sea K el segundo punto de intersección de las circunferencias OAC y OBD. Demostrar que $\angle MKO = 90°$.



Solución. Consideremos la inversión de centro O y radio OA. La recta AB pasa por el centro de inversión, por ende es fija. Las circunferencias OCA y DOB se transforman en las rectas AC y DB respectivamente, las cuales se cortan en K', el inverso de K. La recta CD se transforma en el circuncírculo del $\triangle CDO$ y por ende su punto de intersección M' con la recta AB es el inverso del punto de intersección de CD y AB, a saber M. Notemos que el circuncírculo del $\triangle CDO$ es el círculo de los nueve puntos del $\triangle AK'B$ y por tanto $K'M' \perp AB$. Ya que $OK \cdot OK' = OA^2 = OM' \cdot OM$, el cuadrilátero $K'KM'M$ es cíclico y de aquí surge el resultado deseado. ☐

Problema 9

(IMO 2014, Problema 4) Los puntos P y Q yacen sobre el lado BC de un triángulo auctángulo ABC de modo que $\angle PAB = BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Los puntos M y N yacen sobre las rectas AP y AQ respectivamente, tales que P es el punto medio de AM y Q es el punto medio de AN. Demostrar que las rectas BM y CN se intersectan sobre el circuncírculo del triángulo ABC.



Solución. Tomemos la inversión de centro A y radio r. Denotemos por X' el inverso de X. Obtenemos lo siguiente:

- BC se transforma en el arco $B'C'$ del círculo $AB'C'$ que no contiene a A.
- Los rayos AP' y AQ' yacen entre los rayos AB' y AC'.
- P' y Q' yacen sobre el círculo $AB'C'$.
- $\angle AB'C' = \angle ACB$ y $\angle AC'B' = \angle ABC$.

Tenemos que $\angle PAB = \angle BCA$, por lo que asegura que $\angle P'AB' = \angle C'B'A$. Sin embargo también tenemos que $\angle C'B'A = \angle C'P'A$, Luego $\angle P'AB' = \angle C'P'A$, lo que implica que $AC'P'B'$ es un trapecio isósceles. Análogamente podemos probar que $AB'Q'C$ es un trapecio isósceles. Observemos que, en el diagrama invertido, lo que nos pide el problema equivale a demostrar que los círculos $AB'M'$ y $AC'N'$ se cortan por segunda vez sobre $B'C'$. En efecto, probaremos que este punto de intersección es el punto medio de $B'C'$, digamos K.
Notemos que $AM' \cdot AM = r^2 = AP \cdot AP'$. También tenemos que $AP = 2AM$. Se sigue que $AP' = 2AM'$, por lo que M' es el punto medio de AP'. Similarmente N' es el punto medio de AQ'. Ahora, consideremos el trapecio isósceles $AC'P'B'$. Sus lados AB' y $C'P'$ son paralelos y tienen una mediatriz común, digamos l. Así los puntos A y B' son simétricos con respecto a l y también P' y C' lo son. Luego los segmentos AP' y $B'C'$ son simétricos con respecto a l, por ende sus puntos medios respectivos M' y K son simétricos también. De aquí surge que $AM'KB'$ es un trapecio isósceles y por consiguiente cíclico, por tanto el círculo $AB'M'$ pasa por K. Análogamente podemos probar que el círculo $AC'N'$ pasa por K y esto termina la solución. $\square$

4.7. Problemas propuestos

1. (Rumania 1997). Sea un triángulo ABC y un punto D sobre BC. Dos circunferencias son tangentes exteriores a AD en el mismo punto M y cada una de ellas es tangente a la circunferencia circunscrita de ABC y al lado BC, la primera sobre el segmento BD y la otra sobre el segmento DC. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo A.
(*Sugerencia: Considere los centros de las circunferencias tangentes al circuncírculo del* $\triangle ABC$)

2. Dado un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita ω, sea ϕ la circunferencia tangente a ω en A y tangente a BC en un punto F. Sea E el otro punto de intersección de ϕ con el lado CA (aparte de A).

    a) Demostrar que la recta AF es la bisectriz del ángulo CAB.

    b) Si U y V son los dos puntos de ω que cumplen $CF = CU = CV$, demostrar que UV es tangente la circunferencia ω en el punto E.

3. Sean ABC un triángulo y $D,\ E,\ F$ los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la inversión respecto de la circunferencia inscrita transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la circunferencia de los nueve puntos de DEF.

4. (Sharygin 2016, Ronda de Correspondencia) Sea D un punto arbitrario sobre el lado BC del triángulo ABC. Los círculos ω_1 y ω_2 pasan por A y D de modo que BA es tangente a ω_1 y CA es tangente a ω_2. Sea BX la segunda tangente desde B hasta ω_1 y CY la segunda tangente desde C hasta ω_2. Probar que BC es tangente al circuncírculo del triángulo XDY.

5. (IMO 1996) Sea P un punto interior al triángulo ABC tal que $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$. Sean D y E los incentros de los triángulos APB y APC, respectivamente. Demostrar que AP, BD y CE concurren.

6. Sea ω una semicircunferencia con diámetro PQ. Una circunferencia k es tangente internamente a ω y al segmento PQ en C. Sea AB la tangente a k perpendicular a PQ, con A sobre ω y B sobre el segmento CQ. Probar que AC biseca al ángulo PAB.

7. (IMO 1985) Un círculo con centro O pasa por puntos A y C e intersecta los lados AB y BC de un triángulo ABC en K y N, respectivamente. Las circunferencias circunscritas de los triángulos ABC y KBN se cortan en dos puntos distintos B y M. Probar que $\angle OMB = 90°$.

8. (Sharygin 2016, Ronda final, Grado 10) Sea ABC un triángulo no isósceles, con AA_1 una bisectriz interior y A_2 el punto de contacto del incírculo con el lado BC. Los puntos B_1, B_2, C_1, C_2 son definidos similarmente. Sea O e I el circuncentro e incentro de ABC. Probar que el centro radical del los circuncírculos de los triángulos $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ yace en la recta OI.

9. (USAMO 2017, Problema 3) Sea ABC un triángulo escaleno con circuncírculo Φ e incentro I. El rayo AI corta a BC en D y Φ en M; el círculo con diámetro DM corta a Φ de nuevo en K. Las rectas BC y MK se cortan en S y N es el punto medio de IS. Los circuncírculos de $\triangle KID$ y $\triangle MAN$ se cortan en L_1 y L_2. Probar que Φ pasa por el punto medio de IL_1 o IL_2.

10. (IMO 2015, Problema 3) Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > AC$. Sea Γ su circuncírculo, H su ortocentro y F el pie de altura desde A. Sea M el punto medio del segmento BC. Sea Q el punto de Γ tal que $\angle HQA = 90°$ y sea K el punto de Γ tal que $\angle HKQ = 90°$. Supongamos que los puntos A, B, C, K y Q son todos distintos y están sobre Γ en ese orden. Demostrar que el circuncírculo de KQH es tangente al circuncírculo de FKM.

11. (IMO 2016 SL, G7) Sea I el incentro de un triángulo no equilátero ABC, I_A el $A-$excentro, I'_A la reflexión de I_A en BC y l_A la reflexión de la recta AI'_A en AI. Los puntos I_B, I'_B y la recta l_B se definen de forma análoga. Sea P la intersección de l_A y l_B.

    (a) Probar que P yace sobre la recta OI, donde O es el circuncentro del triángulo ABC.

    (b) Una de las tangentes desde P al incírculo del triángulo ABC corta al circuncírculo en X e Y. Mostrar que $\angle XIY = 120°$.