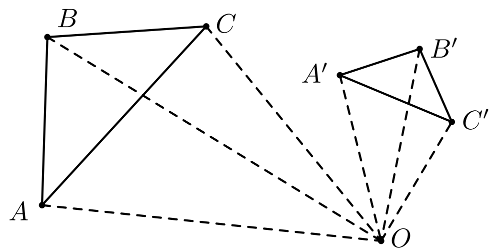
Semejanza espiral

Academia Sabatina de Jóvenes Talento Nicaragua 2017

Jafet Alejandro Baca Obando

Definición 1

Una *semejanza espiral* con centro O es una composición de homotecia y rotación respecto a O.

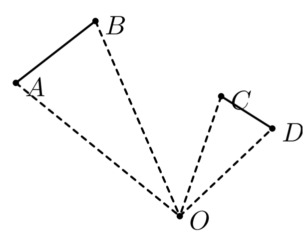


Una semejanza espiral centrada en O que manda $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$.

1. Propiedades

Lema 1 (Unicidad de la semejanza espiral)

Dados cuatro puntos distintos A, B, C y D en el plano tales que el cuadrilátero $ABCD$ no es un paralelogramo, existe una y sólo una semejanza espiral que manda el segmento AB al segmento CD.



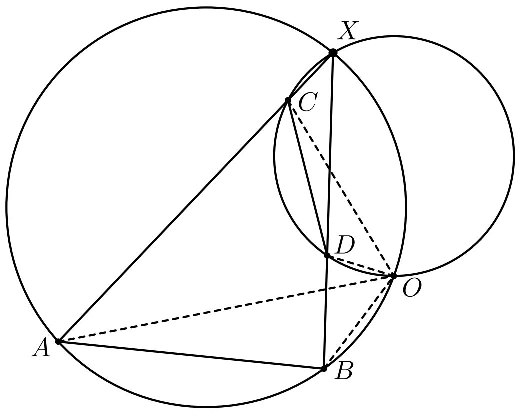
Demostración. Sean a, b, c, d los números complejos correspondientes a los puntos A, B, C, D. Una semejanza espiral tiene la forma $\mathcal{T}(x) = x_0 + \alpha(x - x_0)$, donde $|\alpha|$ es la razón de homotecia y $\arg \alpha$ el ángulo de rotación. Luego, deseamos encontrar x_0 y α tales que:

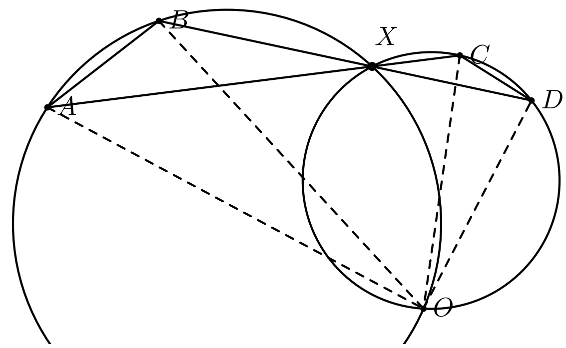
$$\mathcal{T}(a) = x_0 + \alpha(a - x_0) = c; \qquad \mathcal{T}(b) = x_0 + \alpha(b - x_0) = d$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, podemos deducir que $\alpha = \frac{c-d}{d-b}$ y $x_0 = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$. Ya que $ABCD$ no es paralelogramo y A, B, C, D son todos distintos, entonces $a + d \neq b + c$ y $b \neq d$ por lo que x_0 y α están siempre bien definidos. Dado que obtuvimos una única solución al sistema original, entonces existe una única semejanza espiral que manda el segmento AB al segmento CD. $\square$

Lema 2 (Excesivamente útil)

Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos en el plano tales que $AC \nparallel BD$, $\{X\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ y los circuncírculos de $\triangle ABX$ y $\triangle CDX$ se cortan por segunda vez en O, entonces O es el centro de semejanza espiral que manda AB a CD.





Demostración. Notemos que hay varias posibles configuraciones de la semejanza espiral, por lo que utilizaremos *ángulos dirigidos*[1]. En efecto, vemos que:

$$\measuredangle BOA = \measuredangle BXA = \measuredangle DXC = \measuredangle DOC; \qquad \measuredangle OBA = \measuredangle OXA = \measuredangle ODC$$

Por consiguiente, los triángulos AOB y COD son semejantes en la *misma orientación.* □

De forma análoga, podemos probar que $\triangle AOC$ y $\triangle BOD$ son directamente similares, por lo que:

Lema 3 (También excesivamente útil)

Si O es el centro de semejanza espiral que manda el segmento AB al segmento CD, entonces también es el centro de semejanza espiral que manda el segmento AC al segmento BD.

Vale mencionar que si X e Y son puntos correspondientes en los triángulos AOB y COD, tendríamos que $\triangle AOX \sim \triangle COY$ y $\triangle XOB \sim YOD$, por ende, O es el centro de semejanza espiral que manda el segmento AO a CO y el segmento BO a DO.

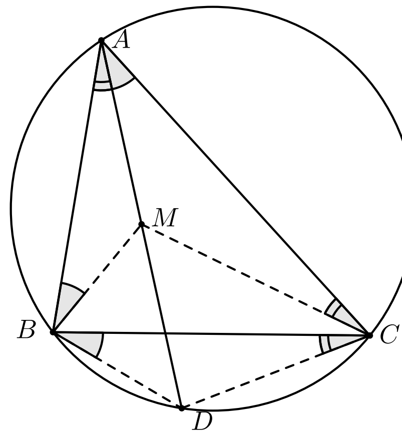
2. Un centro de semejanza espiral especial

Centremos nuestro interés al siguiente:

Lema 4

Sea ABC un triángulo y D el segundo punto de intersección de la $A-$simediana con su circuncírculo. Luego M, el punto medio de la cuerda AD, es el centro de semejanza espiral que manda el lado AB al lado AC.

[1]El ángulo dirigido $\measuredangle ABC$ se define como el ángulo que debemos rotar en sentido antihorario a la recta AB hasta que sea paralela a la recta BC. Todos los ángulos son tomados módulo 180°.



Demostración. Ya que AD es simediana del $\triangle ABC$, entonces BC es simediana de $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$, por tanto, $\angle MBA = \angle CBD = \angle CAD = \angle CAM$ y $\angle ACM = \angle BCD = \angle BAD = \angle BAM$, por ende $\triangle BMA$ y $\triangle AMC$ son semejantes en la misma orientación y se obtiene el resultado. □

Como AD también es simediana del triángulo BDC, fácilmente se puede demostrar que M manda el segmento BD a DC.

3. Problemas resueltos

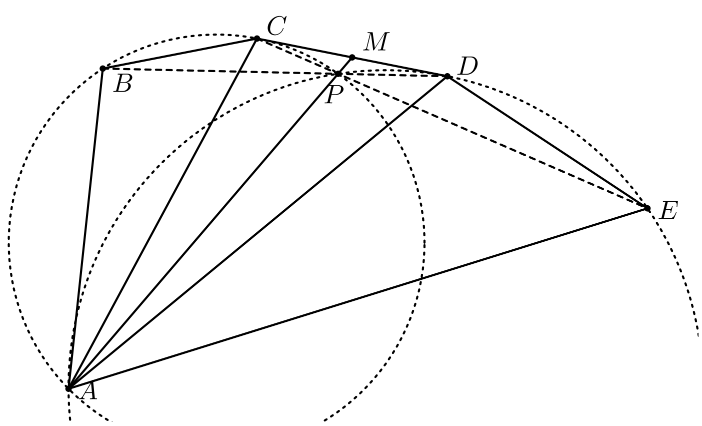
Ejemplo 1

(IMO 2006 SL, G3) Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que:

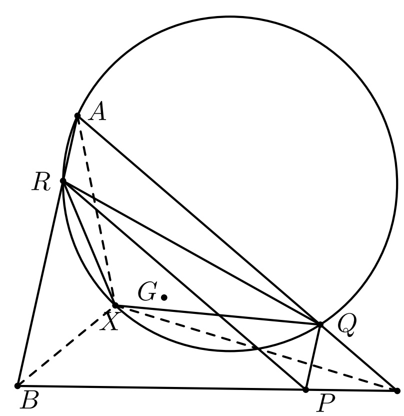
$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE; \qquad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$$

Las diagonales BD y CE se cortan en P. Probar que la recta AP biseca el lado CD.

Solución. Ya que $\angle CBA = \angle EDA$ y $\angle CAB = \angle EAD$, entonces $\triangle CAB$ y $\triangle EAD$ son semejantes con una misma orientación, por lo que por el **lema 1** A debe ser el centro de semejanza espiral que manda BC a DE. Por el **lema 2**, inferimos que P es el segundo punto de intersección de los circuncírculos de ABC y ADE. Notemos que $\angle PCD = \angle ACD - \angle ACP = \angle ABD - \angle ABP = \angle PBC$, luego, CD es tangente al circuncírculo de $\triangle ABC$. Similarmente podemos probar que CD es tangente a circuncírculo del $\triangle ADE$. Si $\{M\} = \overline{AP} \cap \overline{CD}$, obtenemos que $MC^2 = MP \cdot MA = MD^2$ por ende $MC = MD$. □



Ejemplo 1



Ejemplo 2

Ejemplo 2

(USA TST 2008, P7) Sea ABC un triángulo con baricentro G. P es un punto variable sobre el segmento BC. Los puntos Q y R yacen en los lados AC y AB, respectivamente, de modo que $PQ \parallel AB$ y $PR \parallel AC$. Demostrar que, a medida que P varía a lo largo del segmento BC, el circuncírculo del $\triangle AQR$ pasa por un punto fijo X tal que $\angle BAG = \angle CAX$.

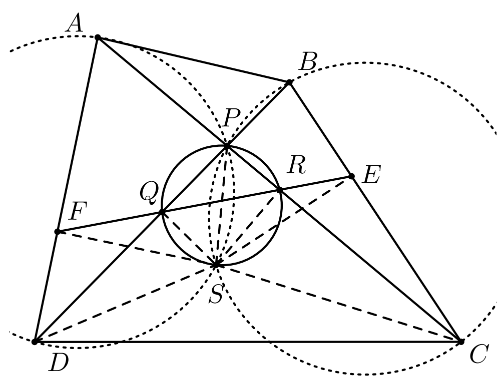
Solución. Sea X el centro de semejanza espiral que manda AB a CA. Por el **lema 4** sabemos que pertenece a la $A-$simediana del $\triangle ABC$ y por tanto $\angle CAX = \angle BAG$. Observemos que:

$$\frac{AR}{RB} = \frac{CP}{PB} = \frac{CQ}{QA}$$

por tanto, X también envía el segmento BR al segmento AQ, entonces $\triangle BXR \sim \triangle AXQ$, luego $\angle BRX = \angle AQX$ por lo que $ARXQ$ es cíclico y entonces X es el punto fijo deseado. □

Ejemplo 3

(IMO 2005, P5) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $BC = AD$, $BC \nparallel AD$. Sean E y F puntos interiores los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, tales que $BE = DF$. Se definen los puntos $\{P\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}, \{Q\} = \overline{BD} \cap \overline{EF}$, $\{R\} = \overline{AC} \cap \overline{EF}$. Considere todos los triángulos PQR cuando E y F varían. Mostrar que los circuncírculos de tales triángulos tienen un punto en común distinto a P.



Ejemplo 3

Solución. Sea S el centro de semejanza espiral que envía AD a BC. Tal punto existe ya que $AD \nparallel BC$ y por ende $ABCD$ no es un paralelogramo. Como E y F son puntos correspondientes en $\triangle ASD$ y $\triangle CBS$, entonces S manda DF a BE y AF a CE; luego, por el **lema 2**, se deduce que los cuadriláteros $APSD$, $BCSP$, $FQSD$, $BESQ$, $ARSF$ y $CERS$ son cíclicos; por consiguiente:

$$\angle QPS = \angle DPS = \angle BCS = \angle ECS = \angle FRS = \angle QRS$$

De donde surge que $PQSR$ es cíclico. Como S es independiente de la selección de E y F, entonces es el otro punto en común de los circuncírculos de todos los triángulos PQR. □

4. Problemas propuestos

1. (OIM 2016 SL) Las circunferencias Φ_1 y Φ_2 se intersecan en dos puntos diferentes A y B. La tangente a Φ_1 por A intersecta a Φ_2 en M y la tangente a Γ_2 por A que corta a Φ_1 en N. Sea P la reflexión de A con respecto a B. Sean S y T los puntos de intersección de las rectas PM y PN con Φ_1 y Φ_2, respectivamente. Demostrar que los puntos S, B, T son colineales.

2. (China MO, 1992) El cuadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito en un círculo ω con centro O. Las diagonales AC y BD se cortan en P. Los circuncírculos de ABP y CDP se cortan en P y Q. Supóngase que O, P y Q son distintos. Probar que $\angle OQP = 90°$.

3. (IMO 2017, P4) Sean R y S puntos distintos sobre la circunferencia Ω tales que RS no es un diámetro de Ω. Sea l la recta tangente a Ω en R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento RT. El punto J se elige en el menor arco RS de Ω de manera que Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo JST, intersecta a l en dos puntos distintos. Sea A el punto común de Γ y l más cercano a R. La recta AJ corta por segunda vez a Ω en K. Demostrar que la recta KT es tangente a Ω.

4. (Balkan MO 2009, P2) Sea MN una recta paralela al lado BC de un triángulo ABC, con M sobre el lado AB y N sobre el lado AC. Las rectas BN y CM se cortan en P. Los circuncírculos de los triángulos BMP y CNP se cortan en un punto $Q \neq P$. Probar que $\angle BAQ = \angle CAP$.

5. (IMO 2015 SL, G3) Sea ABC un triángulo con $\angle C = 90°$, y sea H el pie de altura desde C. Un punto D es escogido dentro del triángulo CBH tal que CH biseca AD. Sea P el punto de intersección de las rectas BD y CH. Sea ω la semicircunferencia con diámetro BD que corta a CB en un punto interno. Una recta por P es tangente a ω en Q. Probar que CQ y AD se cortan en ω.

6. (USAMO 2008, P2) Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno. Sean M, N, P los puntos medios de BC, CA, AB respectivamente. Las mediatrices de AB y AC cortan al rayo AM en D y E, respectivamente, y las rectas BD y CE se cortan en F, dentro del triángulo ABC. Probar que A, N, F, P yacen sobre una misma circunferencia.

7. (Irán 2017, 3^{ra} Ronda) Sea ABC un triángulo ABC arbitrario. Sean E y F dos puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, tal que sus distancias al punto medio de BC son iguales. Los circuncírculos de ABC y AEF se cortan en otro punto P. Las tangentes por E y F al circuncírculo de AEF se cortan en K. Probar que $\angle KPA = 90°$.

8 (IGO 2014, Nivel Senior, P3) La tangente al circuncírculo del triángulo acutángulo ABC (con $AB < AC$) en A corta a BC en P. Sea X un punto sobre OP tal que $\angle AXP = 90°$. Los puntos E y F yacen sobre los lados AB y AC, respectivamente, y están en el mismo lado de la recta OP tal que $\angle EXP = \angle ACX$ y $\angle FXO = \angle ABX$. La recta EF corta al circuncírculo del triángulo ABC en K, L. Probar que KL es tangente al circuncírculo del triángulo KLX.

9. (IMO SL 2005, G5) Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. Sea H el ortocentro de ABC y M el punto medio de BC. Sea D un punto sobre el lado AB y E sobre el lado AC tal que $AE = AD$ y los puntos D, H, E son colineales. Probar que la recta HM es perpendicular a la cuerda común de los circuncírculos de los triángulos ABC y ADE.

10. Sea A uno de los puntos de intersección de los círculos ω_1 y ω_2 con centros O_1 y O_2. La recta l es tangente a ω_1, ω_2 en B, C, respectivamente. Sea O_3 el circuncentro del triángulo ABC. Sea D un punto tal que A es punto medio de O_3D. Sea M el punto medio de O_1O_2. Probar que $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.

11. (IMO SL 2006, G9) Los puntos A_1, B_1, C_1 son escogidos en los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, respectivamente. Los circuncírculos de los triángulos AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 intersecan el circuncírculo del triángulo ABC nuevamente en A_2, B_2, C_2, respectivamente. Los puntos A_3, B_3, C_3 son simétricos a A_1, B_1, C_1 con respecto a los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente. Demostrar que los triángulos $A_2B_2C_2$ y $A_3B_3C_3$ son semejantes.