# Academia Sabatina de Jóvenes Talento - Nicaragua 2022

Geometría Euclidiana - Grupo Preolímpico

**Unidad I: Fundamentos de Geometría Euclidiana**
**Puntos y rectas notables del triángulo**

Jafet Baca y Néstor González — 22 de enero de 2022

Existe una cantidad inmensa de puntos con propiedades interesantes relacionados al triángulo. En geometría de olimpiada, al hablar de puntos notables del triángulo, usualmente nos referimos a cuatro puntos esenciales: el ortocentro, el baricentro, el incentro y el circuncentro. Nos encargaremos de su definición y propiedades relacionadas, en detalle, a lo largo de este capítulo.

## 1. Las mediatrices y el circuncentro

**Definición 1.**

La *mediatriz* de un segmento $AB$ es el lugar geométrico de los puntos $P$ equidistantes a $A$ y $B$.

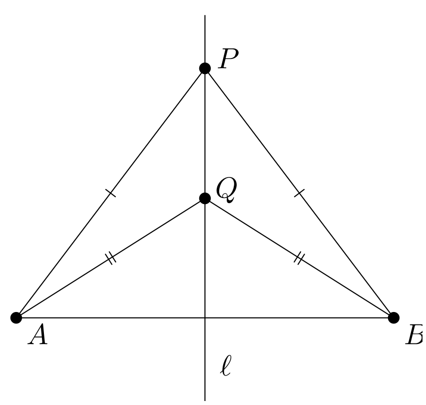


**Figura 1.** La mediatriz $\ell$ de $AB$.

Coincidentemente, ¡la mediatriz es una recta! Intenta cerciorarte de este resultado por tu bproia cuenta. Por definición, todo punto sobre una mediatriz nos brinda triángulos isósceles. Por ejemplo, en el gráfico 1 tenemos que $AP = PB$ y $AQ = QB$. Por supuesto, $\ell$ pasa por el punto medio de $\overline{AB}$.

Ahora consideremos el caso de un triángulo. Ocurre que las mediatrices de sus tres lados se intersecan en un mismo punto, el *circuncentro* de $\triangle ABC$.

**Definición 2.**

El *circuncentro* del triángulo $ABC$ (usualmente denotado por $O$), es el punto donde las mediatrices de los lados $AB$, $BC$ y $CA$ concurren.

En efecto, supongamos que las mediatrices de los lados $AB$ y $AC$ se cortan en $O$. Por definición, tenemos que $OB = OA = OC$, por lo que $O$ debe estar sobre la mediatriz del lado $BC$ también. Esta igualdad implica la existencia de una circunferencia con centro en $O$, que pasa por los tres vértices del triángulo. Esta circunferencia recibe el nombre de *circuncírculo* de $\triangle ABC$. Nos referiremos al radio del circuncírculo como *circunradio*. Naturalmente, $OA$, $OB$ y $OC$ son circunradios de $\triangle ABC$.

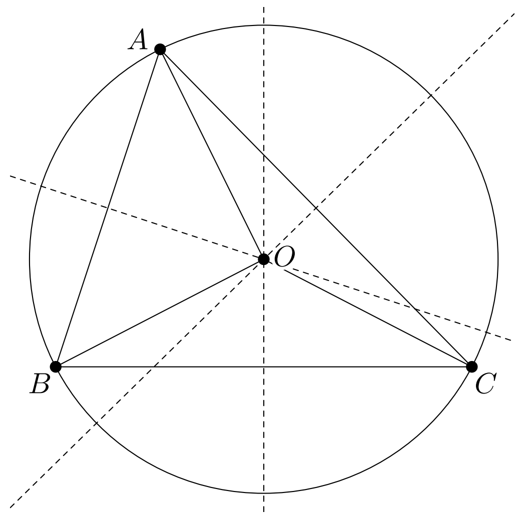


**Figura 2.** Existencia del circuncentro y el circuncírculo de $ABC$.

Más adelante asociaremos al circuncentro con propiedades que también involucran al baricentro y el ortocentro del triángulo.

## 2. Las medianas y el baricentro

**Definición 3.**

El *baricentro* o *centroide* es el punto común de las rectas que unen los vértices con el punto medio de sus respectivos lados opuestos en el triángulo $ABC$. Estas rectas son las *medianas* de $\triangle ABC$. El triángulo $\triangle LMN$ es el *triángulo medial* de $\triangle ABC$.

Para probar la concurrencia, supongamos que $L$, $M$ y $N$ son los puntos medios de $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente. Definamos a $G$ como el punto de intersección de $BM$ y $CN$. Al ser $MN$ base media respecto a $BC$ sabemos que $MN \parallel BC$, por lo que

$$\frac{BG}{GM} = \frac{CG}{GN} = \frac{BC}{MN} = 2$$

Sea $F$ el simétrico de $G$ con respecto a $L$. Con esto, $BGCF$ es un paralelogramo, lo que implica $CF = BG = 2MG$, y así

$$\frac{FC}{GM} = \frac{AC}{AM} = 2$$

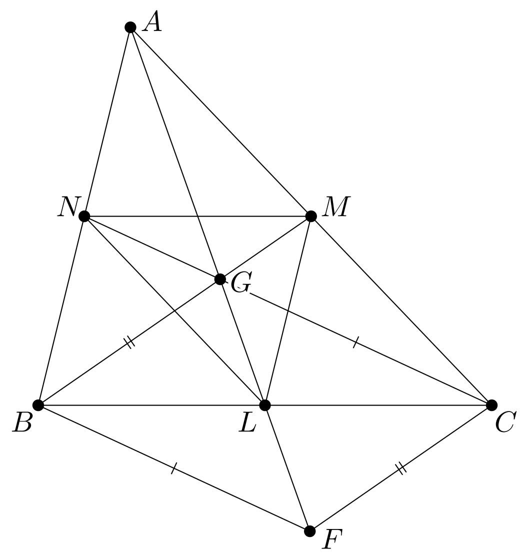


**Figura 3.** Las medianas de $\triangle ABC$ y su baricentro.

por consiguiente, $A$, $G$ y $F$ están sobre una misma línea, y por ende $AG$ coincide con la $A$-mediana de $\triangle ABC$.

El teorema de Ceva, que abordaremos en un capítulo posterior, trivializa la prueba de la concurrencia de las medianas. En la demostración anterior utilizamos (y verificamos) el siguiente hecho fundamental:

**Proposición 1.**

El baricentro $G$ divide a cada mediana en la razón $2:1$.

Por ejemplo, $\frac{AG}{GL} = 2$, que implica la igualdad $AL = 3GL$; análogamente para las otras dos medianas.

Notemos algo importante. Como $\triangle BGL$ y $\triangle LGC$ comparten la misma altura desde $G$ y sus bases $BL$ y $CL$ son congruentes, obtenemos que $[BGL] = [LGC]$. De forma similar, $[AGN] = [NGB]$ y $[CGM] = [MGA]$. Pero veamos que las perpendiculares desde $B$ y $C$ a $MN$ poseen igual longitud porque $MN \parallel BC$, así que $[MBN] = [NCM]$ y por ende $[NGB] = [CMG]$. Análogamente conseguimos que $[AGN] = [LGC]$ y $[MGA] = [BGL]$. En conclusión, hemos mostrado que

$$[BGL] = [NGB] = [AGN] = [MGA] = [CGM] = [LGC]$$

es decir

**Proposición 2.**

Las medianas de $\triangle ABC$ lo dividen en seis triángulos con áreas iguales y con el baricentro como vértice común.

## 3. Las alturas y el ortocentro

**Definición 4.**

El *ortocentro* es el punto de intersección de las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice a su lado opuesto correspondiente, llamadas *alturas*.

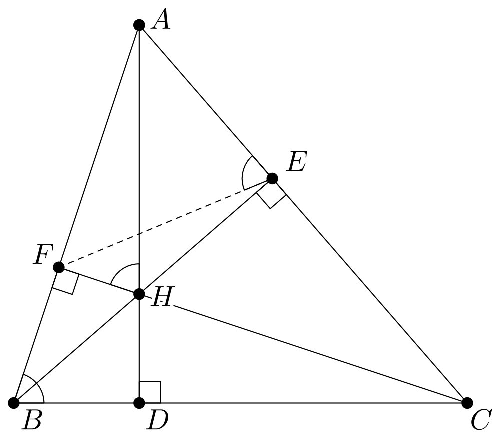


**Figura 4.** El ortocentro $H$ es el punto común de las alturas $AD$, $BE$ y $CF$.

Definamos a $D$, $E$ y $F$ como los *pies* de alturas desde $A$, $B$ y $C$, respectivamente. Sea $H$ el punto de intersección de las alturas $CF$ y $BE$, y construyamos $D = \overline{AH} \cap \overline{BC}$. Como $\angle BFC = \angle BEC = 90°$, los cuadriláteros $BFEC$ y $AFHE$ son cíclicos, por tanto

$$\angle DBF = \angle CBA = \angle AEF = \angle FHA$$

lo que implica que $BDHF$ también es cíclico, por consiguiente, $\angle BDH = \angle HFA = 90°$.

**Definición 5.**

Los segmentos $BH$, $CH$ y $AH$ son los *segmentos de Euler* del $\triangle ABC$.

La configuración alturas-ortocentro guarda una variedad de resultados útiles e involucrados de forma frecuente en problemas de olimpiada. Estudiaremos algunas de estas propiedades en lo que sigue. Para estas, trabajaremos con un triángulo $ABC$ acutángulo. Las demostraciones pueden ser modificadas para el caso en que sea obtusángulo. Por supuesto, el ortocentro de un triángulo rectángulo es el vértice del ángulo recto.

**Proposición 3.**

La reflexión de $H$ con respecto a $BC$ yace sobre el circuncírculo de $\triangle ABC$.

Equivalentemente, también es cierto que los reflejos de $H$ con respecto a $CA$ y $AB$ yacen sobre $(ABC)$.

*Prueba.* Sea $H'$ el segundo punto de intersección de la altura $AD$ con $(ABC)$. Como $BDEA$ es cíclico, sucede que

$$\angle H'BD = \angle H'BC = \angle H'AC = \angle DAE = \angle DBE = \angle DBH$$

lo que, junto a $\angle BDH = 90°$, indica que $BC$ es la mediatriz de $\overline{HH'}$; de ahí el resultado. □

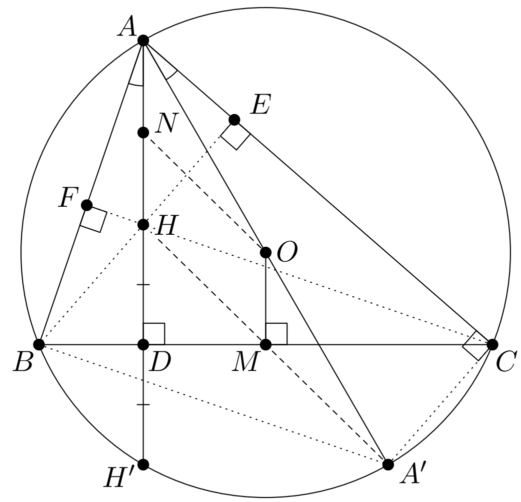


**Figura 5.** Configuración alturas-ortocentro.

Como los triángulos $BHC$ y $BH'C$ resultan ser congruentes, los radios de sus circunferencias circunscritas coinciden en sus medidas, es decir $\triangle ABC$ y $\triangle BHC$ tienen circunradios congruentes.

**Proposición 4.**

Los circunradios del triángulo $ABC$ y los tres triángulos formados por el ortocentro y los vértices de $ABC$, a saber $BHC$, $AHC$ y $AHB$, son congruentes.

El ortocentro y el circuncentro guardan otros resultados interesantes, como veremos a continuación.

**Proposición 5.**

La altura y el circunradio que parten de un mismo vértice —digamos $AH$ y $AO$— forman ángulos iguales con los lados con tal vértice en común —$AB$ y $AC$—.

Es decir, $AH$ y $AO$ son *conjugadas isogonales* del $\triangle ABC$. Una interpretación alternativa es que estas dos rectas son simétricas respecto a la bisectriz interna de $\angle BAC$ (brevemente sabremos qué es una bisectriz). Ya que esta propiedad es cierta para las parejas $BH$, $BO$ y $CH$, $CO$, lo que tenemos en realidad es que *$O$ y $H$ son conjugados isogonales*, uno del otro, en el triángulo $ABC$.

*Prueba.* Es suficiente ver que

$$\angle DAB = 90° - \angle ABC = \angle CAO$$

puesto que $\triangle AOC$ es isósceles en $O$ y $\angle AOC = 2\angle ABC$. □

Consideremos el antípoda de $A$ en $(BAC)$, es decir, el punto diametralmente opuesto a $A$ en el circuncírculo de $\triangle ABC$. Como $\angle A'BA = \angle A'CA = 90°$, inferimos que $CH \parallel A'B$ y $BH \parallel A'C$, de modo que $BHCA'$ es un paralelogramo. Al ser $M$ el punto medio de $\overline{BC}$, esto indica que

**Proposición 6.**

El ortocentro $H$, el punto medio $M$ del lado $BC$ y el antípoda $A'$ de $A$ en $(BAC)$ están alineados. Además, $B$, $H$, $C$ y $A'$ forman un paralelogramo.

Sea $N$ el punto medio del segmento de Euler $AH$. Es claro que $AD \parallel OM$. Como $ON$ es base media de $HA'$ en $\triangle HAA'$ concluimos que $OMHN$ es un paralelogramo. Esto implica que $OM = NH = \frac{AH}{2}$, es decir

**Proposición 7.**

La distancia del circuncentro al punto medio de un lado es la mitad de la longitud del segmento de Euler con vértice opuesto a ese lado.

¡Es momento de usar lo aprendido para resolver un problema!

**Ejemplo 1.**

(Rusia 2019, Grado 9, P3) El círculo $\Omega$ con centro $O$ es el circuncírculo del triángulo acutángulo $ABC$ con $AB < BC$ y ortocentro $H$. Sobre la recta $BO$ yace un punto $D$ tal que $O$ está entre $B$ y $D$, y $\angle ADC = \angle ABC$. La semirrecta paralela a $BO$, que empieza en $H$ y corta al segmento $AC$, interseca a $\Omega$ en $E$. Probar que $BH = DE$.

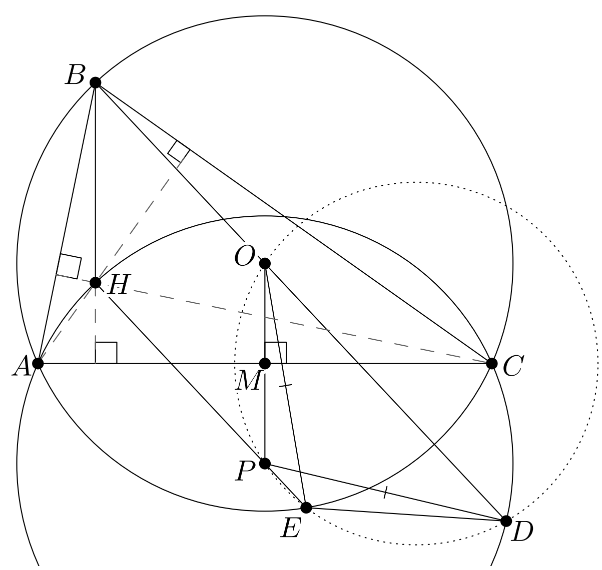


**Figura 6.** Trapecios isósceles y un paralelogramo

*Solución.* Es suficiente demostrar que $BDEH$ es un trapecio isósceles. Tenemos que $\angle AHC = 180° - \angle ABC$ (¿por qué?), lo que junto a la hipótesis angular del problema implica que $D$ está sobre el circuncírculo de $\triangle AHC$.
Sea $P$ el simétrico de $O$ con respecto al punto medio de $\overline{AC}$, digamos $M$. Por la proposición 4, inferimos que $P$ es el circuncentro de $\triangle AHC$. Es más, de acuerdo con la proposición 7, ocurre que $OP = BH$. Puesto que $BH \parallel OP$, deducimos que $BOPH$ es un paralelogramo, por ende, basta con demostrar que $ODEP$ es un trapecio isósceles. Se observa que

$$PD = PC = OC = OE$$

Como $OD \parallel PE$, esto indica que $OPED$ es un trapecio isósceles o bien un paralelogramo. Esto último es absurdo, pues conlleva a que $PE = OD$. ¡Estamos hechos! □

### 3.1 Lemas relacionados

En esta sección abordaremos algunos resultados que no surgen directamente de la configuración alturas-ortocentro; sin embargo, contribuyen a la resolución completa de varios problemas de olimpiada.

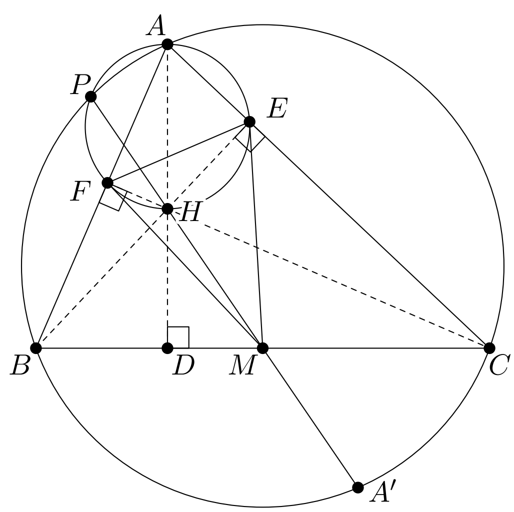


**Figura 7.** Una tangencia oculta que involucra dos pies de alturas.

**Lema 1.**

Si $E$ y $F$ corresponden a los pies de alturas desde $B$ y $C$, y $M$ es el punto medio del lado $BC$, entonces $ME$ y $MF$ son tangentes al circuncírculo de $\triangle AEF$.

*Prueba.* Es claro que $M$ es el circuncentro de $BFEC$. Observemos que

$$\angle FEM = 90° - \frac{\angle EMF}{2} = 90° - \angle ECF = \angle EAF$$

de donde surge el hecho deseado. □

**Lema 2.**

El segundo punto de intersección del círculo de diámetro $\overline{AH}$ con el circuncírculo de $ABC$, el ortocentro, el punto medio del lado $BC$ y el antípoda de $A$ en $(ABC)$ están alineados.

*Prueba.* Sea $P$ el segundo punto de intersección de ambos círculos. Por la proposición 6 ya sabemos que $H$, $M$ y $A$ son colineales. Para terminar, notemos que

$$\angle APH = 90^\circ = \angle APA'$$

de donde concluimos que $P$, $H$ y $A'$ están alineados. $\square$

Resolvamos un ejercicio con ayuda de este hecho.

**Ejemplo 2.**

(Balcánica Junior 2019, P3) El triángulo $ABC$ es tal que $AB < AC$. La mediatriz del lado $AC$ corta a los lados $AB$ y $AC$ en $P$ y $Q$, respectivamente. Sea $H$ el ortocentro de $ABC$ y sean $M$ y $N$ los puntos medios de los segmentos $BC$ y $PQ$, respectivamente. Probar que las rectas $HM$ y $AN$ se cortan en el circuncírculo de $ABC$.

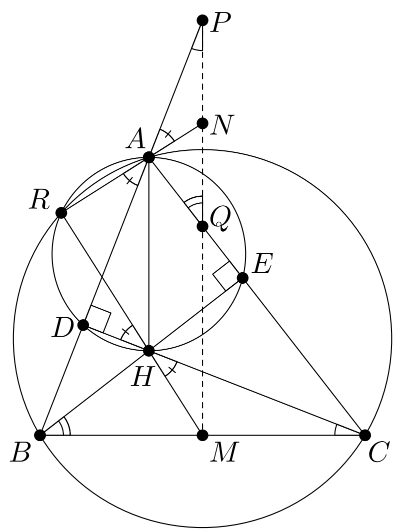


**Figura 8.** Dos rectas que se cortan sobre el circuncírculo de $ABC$.

*Solución.* Notemos que

$$\angle APQ = 90^\circ - \angle ABC = \angle HCB \qquad \text{y} \qquad \angle PQA = 90^\circ - \angle BCA = \angle CBH$$

así que los triángulos $PAQ$ y $CHB$ son semejantes. Al ser $HM$ y $AN$ medianas correspondientes de estos triángulos, podemos inferir que $\angle PAN = \angle CHM$.
Definamos a $R$ como el punto de intersección de $HM$ y $AN$, mientras que $D$ es el pie de altura desde $C$. Por la igualdad angular anterior obtenemos que $\angle RHD = \angle CHM = \angle PAN = \angle RAD$, por tanto $R$ yace en el circuncírculo de $\triangle ADH$.
Finalmente, por el lema 2 concluimos que $R$ también está sobre el circuncírculo de $ABC$. $\square$

## 4. Un círculo especial: El círculo de los nueve puntos

Ahora que hemos estudiado al circuncentro, centroide y ortocentro, es momento de explorar propiedades que relacionan estos tres puntos. En particular, probaremos la existencia de un círculo especial, a saber, el *círculo de los nueve puntos* del triángulo $ABC$.

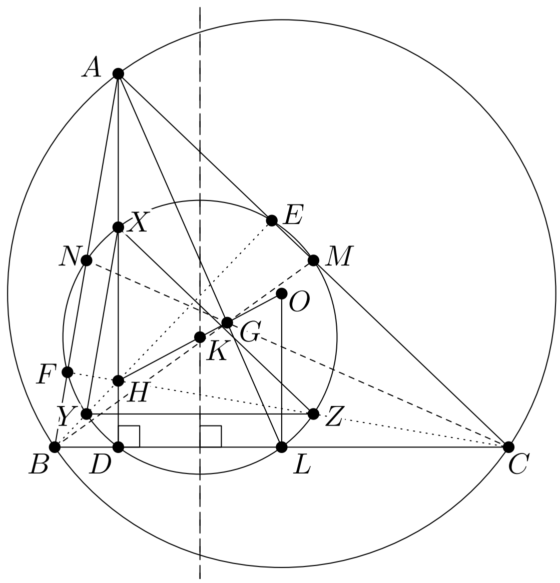


**Figura 9.** El círculo de los nueve puntos de $\triangle ABC$.

**Definición 6.**

Los puntos medios de los lados del triángulo $ABC$, los puntos medios de sus segmentos de Euler y los pies de sus alturas están sobre una misma circunferencia, llamada *círculo de los nueve puntos* de $ABC$.

*Prueba.* Al ser $OLDH$ un trapecio isósceles con $DL$ perpendicular a sus bases, se sigue que la mediatriz de $\overline{DL}$ pasa por el punto medio de $OH$, digamos $K$. Por un argumento análogo se infiere que las mediatrices de $\overline{NF}$ y $\overline{EM}$ pasan por $K$. Ya que $MN \parallel BC$ y $BFEC$ es cíclico deducimos que $FNEM$ es cíclico. Similarmente, $LNFD$ y $MLED$ son cuadriláteros inscritos. Esto implica que $KD = KL = KM = KE = KN = KF$, es decir los seis puntos $D$, $L$, $M$, $E$, $N$ y $F$ están sobre una misma circunferencia de centro $K$ y radio $KD$.
Sean $X$, $Y$ y $Z$ los puntos medios de $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$, respectivamente. Por supuesto, $ZL \parallel BH$, y $YL \parallel HC$ por ser bases medias, luego $HYLZ$ es un paralelogramo. Como $H$ es también ortocentro de $\triangle XYZ$, por la proposición 6 se sigue que $L$ está sobre $(XYZ)$. Análogamente, $M$ y $N$ yacen en $(XYZ)$, por lo que $XNYLZM$ es un hexágono cíclico. Como $(DLMENF)$ y $(XNYLZM)$ son los mismos círculos, concluimos que los nueve puntos son concíclicos. $\square$

Una demostración más sencilla se aborda en el capítulo de homotecia. Como pudimos ver, el centro del círculo de los nueve puntos coincide con el punto medio del segmento que une al ortocentro y circuncentro de $\triangle ABC$. Sin embargo, hay un punto notable adicional que también yace sobre $\overline{OH}$: ¡el baricentro de $\triangle ABC$!

**Proposición 8.**

El ortocentro $H$, el centroide $G$ y el circuncentro $O$ están sobre una misma línea, llamada *recta de Euler* de $\triangle ABC$. Además, $G$ divide a $\overline{OH}$ en la razón $2:1$.

Este hecho se obtiene meramente a partir de las proposiciones 7 y 1. Debes ser capaz de probarlo por cuenta propia.

Hay otros resultados geniales relacionados con el círculo de los nueve puntos. Por ejemplo, el teorema de Feuerbach plantea que es tangente externamente a los excírculos de $ABC$, mientras que el incírculo le es tangente internamente. En breve dilucidaremos qué es un excírculo.
Otras propiedades interesantes y que puedes verificar por tu propia parte son las siguientes:

**Proposición 9.**

El circunradio de $\triangle XYZ$ es la mitad del circunradio de $\triangle ABC$, es decir

$$R_{\triangle XYZ} = \frac{R}{2}$$

**Proposición 10.**

El triángulo medial $LMN$ y el triángulo $XYZ$ son congruentes.

## 5. Las bisectrices y el incentro

**Definición 7.**

La *bisectriz* del ángulo $BAC$ es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a las rectas $AB$ y $AC$ son congruentes.

Existen dos rectas que satisfacen esta definición, nombradas como bisectriz interna y bisectriz externa. La *bisectriz interna* del ángulo $BAC$ es la recta que lo divide en dos partes iguales. Entretanto, la *bisectriz externa* es la recta que divide al suplemento de $\angle BAC$ en dos partes iguales.

A partir de estas definiciones alternativas surge directamente que las bisectrices interna y externa son perpendiculares, ¡pruébalo! Es importante mantener este hecho en mente.

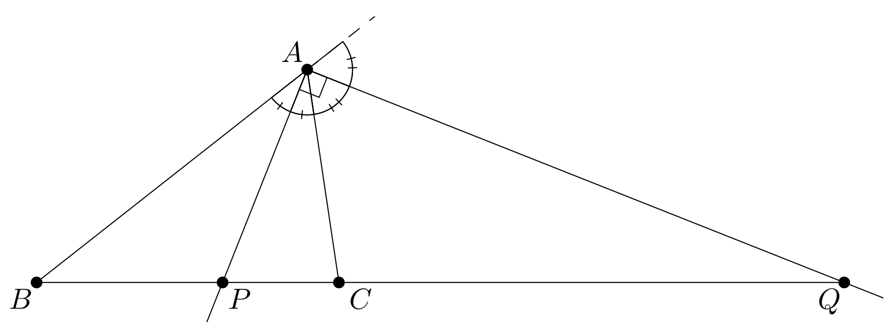


**Figura 10.** Las bisectrices interna y externa forman un ángulo recto.

Consideremos al triángulo $ABC$. Los segmentos en los que el lado $BC$ está dividido por las bisectrices de $\angle BAC$ y los lados $AB$ y $AC$.

**Teorema 1** (Teorema de la bisectriz)**.**

Suponga que las bisectrices interna y externa cortan al lado $BC$ y a su prolongación en $P$ y $Q$, respectivamente. Se tiene que

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{CQ}$$

El teorema de Steiner brinda una prueba directa, al igual que la ley del seno aplicado a los triángulos $BAP$ y $CAP$. Los detalles se dejan como ejercicio al lector.

Al igual que las rectas notables tratadas en las secciones anteriores, las bisectrices internas poseen un punto común.

**Definición 8.**

Las bisectrices internas de un triángulo $ABC$ concurren en un punto, llamado el *incentro* de $\triangle ABC$.

*Prueba.* Sea $I$ el punto de corte de las bisectrices internas de $\angle ABC$ y $\angle ACB$, y definamos a $D$ como el punto donde $AI$ interseca a $BC$. Por el teorema de la bisectriz

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD}$$

Reordenando, concluimos por el recíproco del teorema de la bisectriz que $\angle BAD = \angle DAC$, por ende, las bisectrices internas de $\triangle ABC$ concurren en $I$. □

Junto a la definición 7, lo anterior implica la existencia de un círculo centrado en $I$ y tangente simultáneamente a los tres lados de $\triangle ABC$.

**Definición 9.**

El *incírculo* del triángulo $ABC$ es la circunferencia con centro en $I$ y tangente a los lados $BC$, $CA$ y $AB$. El radio de este círculo se conoce como *inradio* de $\triangle ABC$, usualmente denotado por $r$.

Las bisectrices externas también están involucradas en ciertas concurrencias. De esto nos encargaremos más adelante. Por ahora, consideremos la siguiente propiedad.

**Proposición 11.**

El ángulo $AIC$ equivale a $90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$.

La demostración es manipulación angular simple, por lo que queda como ejercicio al lector.
Supongamos que el rayo $AI$ corta a $(ABC)$ en $M$. Es claro que la bisectriz interna de $\angle BAC$ determina arcos iguales sobre $(ABC)$, de ahí que $BM = MC$; pero nótese que

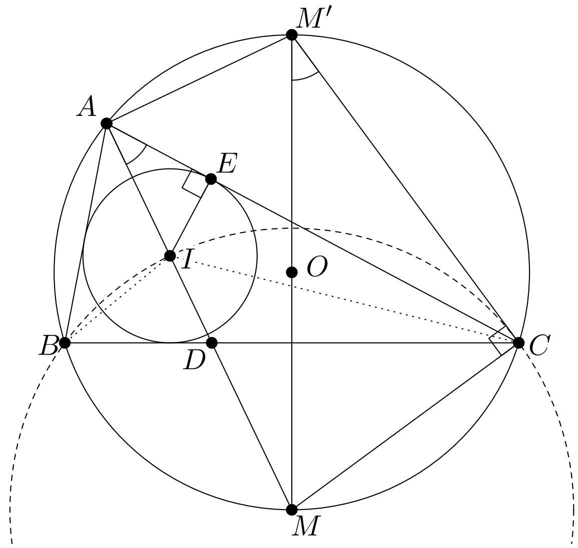


**Figura 11.** El incírculo de $\triangle ABC$ y algunos hechos relacionados.

$$\angle MIC = \angle IAC + \angle ACI = \angle BAM + \angle ICB = \angle BCM + \angle ICB = \angle ICM$$

lo que implica que $IM = CM$. En resumen

**Proposición 12.**

El punto medio del arco menor $BC$ es el circuncentro de $\triangle BIC$.

Inquiramos acerca de la potencia de $I$ respecto a $(ABC)$. Al ser un punto en el interior de $\triangle ABC$ y por ende dentro de $(ABC)$, tenemos

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot IM$$

Sea $M'$ el antípoda de $M$. Como $\angle AMM' = 90°$, inferimos que $AM'$ es la bisectriz externa de $\angle BAC$. Sea $E$ el punto de contacto del incírculo de $\triangle ABC$ con el lado $AC$. Es simple probar que $\triangle IAE \sim \triangle MM'C$, de donde extraemos que

$$AI \cdot MI = 2rR$$

por consiguiente, hemos probado que

**Proposición 13.**

(Relación de Euler). La distancia del incentro al circuncentro, el inradio y el circunradio están vinculados en la siguiente expresión

$$OI^2 = R(R - 2r)$$

En particular, se tiene que $R \geq 2r$, con igualdad si y solo si $\triangle ABC$ es equilátero.

Resolvamos un problema sencillo y otro con mayor dificultad con ayuda de estos resultados.

**Ejemplo 3.**

(IMO 2006, P1) Sea $ABC$ un triángulo con incentro $I$. Un punto $P$ en el interior del triángulo satisface que $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Demostrar que $AP \geq AI$, y que la igualdad se cumple si y solo si $P = I$.

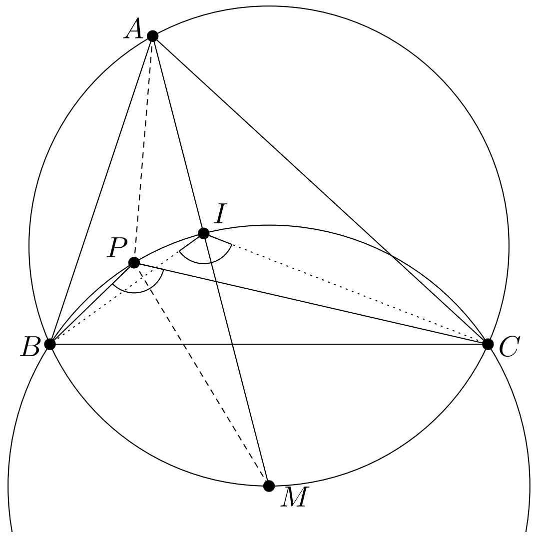


**Figura 12.** Problema 1 de la IMO 2006.

*Solución.* Por suma de ángulos internos, la condición angular es equivalente a

$$\angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$$

por tanto, $\angle BPC = 90^\circ + \angle BAC/2$. Como el ángulo $\angle AIC$ también es igual al último valor según la proposición 11, el cuadrilátero $BPIC$ es cíclico. Ya que el circuncentro de $\triangle BIC$ (llamémoslo $M$) está dado por la segunda intersección de $AI$ con el circuncírculo de $\triangle ABC$, por la desigualdad triangular en $\triangle APM$ podemos obtener que

$$AP + PM \geq AI + IM$$

de donde el resultado sigue. La igualdad ocurre cuando $A, P$ y $M$ están alineados; es decir, cuando $P = I$. □

**Ejemplo 4.**

(Iraní de Geometría 2021, Nivel Intermedio, P4) Sea $ABC$ un triángulo escaleno acutángulo con incentro $I$ y circuncírculo $\Gamma$. La recta $AI$ corta a $\Gamma$ por segunda vez en $M$. Sea $N$ el punto medio de $BC$ y sea $T$ el punto sobre $\Gamma$ tal que $IN \perp MT$. Finalmente, sean $P$ y $Q$ los puntos de intersección de $TB$ y $TC$ con la perpendicular a $AI$ por $I$, respectivamente. Demostrar que $PB = CQ$.

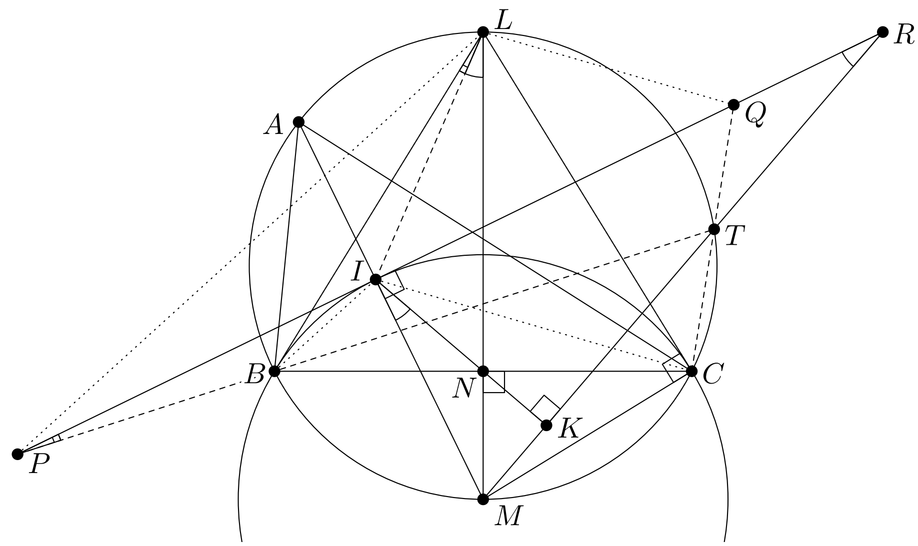


**Figura 13.** Problema 4 de la IGO 2021 - Nivel Intermedio.

*Solución.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AC > AB$. Definamos a $K = \overline{IN} \cap \overline{MT}$, $R = \overline{MT} \cap \overline{PQ}$ y $L = \overline{MN} \cap \Gamma, L \neq M$. Por el teorema del cateto aplicado a los triángulos rectángulos $LCM$ y $RIM$ obtenemos que $MC^2 = MN \cdot ML$ y $MI^2 = MK \cdot MR$. Por la proposición 12 sabemos que $MC = MI$, así que las expresiones anteriores son equivalentes y concluimos que $MI$ es tangente a los circuncírculos de $LIN$ y $RIK$, por tanto $\angle ILM = \angle MIN = \angle IRM$, de modo que $MRLI$ es cíclico. Siendo así, veamos que

$$\angle ILC = \angle ILM + \angle MLC = \angle IRM + \angle MTC = \angle QRT + \angle QTR = \angle IQC$$

por consiguiente, $ILQC$ también es cíclico. Pero $\angle LCI = \angle QIC$, ya que $QI$ y $LC$ son tangentes al circuncírculo de $\triangle BIC$ y estos ángulos semiinscriben al arco $\widehat{IC}$, así que $ILQC$ es un trapecio isósceles con $IL = QC$. De forma similar podemos probar que $ILPB$ es un trapecio isósceles con $IL = PB$. El resultado es inmediato. $\square$

## 5.1 Bisectrices externas y excentros

Ahora es el turno de hablar un poco más acerca de las bisectrices externas, cuadriláteros cíclicos y puntos de concurrencia relacionados. Mantengamos la notación utilizada en el apartado anterior.

**Proposición 14.**

La bisectriz interna de $\angle BAC$ y las bisectrices externas de $\angle ABC$ y $\angle ACB$ concurren en un punto, el *excentro* de $\triangle ABC$ opuesto al vértice $A$.

Es claro que $\triangle ABC$ cuenta con tres excentros. Por motivos de brevedad, usaremos el término $A$-excentro para referirnos al excentro correspondiente al vértice $A$.

*Prueba.* Sea $I_A$ el punto de intersección de las bisectrices externas de $\angle B$ y $\angle C$. Como

$$\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90^\circ$$

tenemos que $BICI_A$ es cíclico. Lo anterior implica que $I_A$ es el antípoda de $I$ en $(BICI_A)$. Por la proposición 12 concluimos que $I_A$ está sobre $IM$, por ende, $AI$ también pasa por $I_A$. $\square$

Esta concurrencia implica la existencia de un círculo centrado en $I_A$, exterior a $\triangle ABC$, tangente a sus tres lados.

**Definición 10.**

El *excírculo* de $\triangle ABC$ opuesto a $A$ (brevemente nombrado como $A$-excírculo) es el círculo con centro en el $A$-excentro y que toca al lado $BC$ y las prolongaciones de $AB$ y $AC$. El $A$-*exradio* es el radio de este círculo, denotado comúnmente como $r_A$.

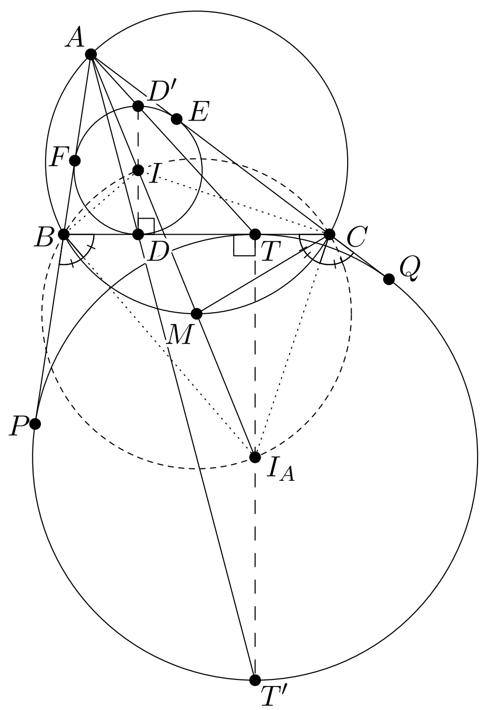


**Figura 14.** El $A$-excírculo de $\triangle ABC$ y propiedades relacionadas.

Sea $D'$ el antípoda de $D$ en el incírculo de $\triangle ABC$, y $T$ el punto de contacto del $A$-excírculo con $BC$. Como $\frac{AI}{AI_A} = \frac{r}{r_A} = \frac{ID'}{I_AT}$ (¿por qué?) y $D'I \parallel TI_A$, inferimos que $A$, $D'$ y $T$ son colineales.

**Lema 3.**

El antípoda del punto de tangencia del incírculo con $BC$, el punto de contacto del $A$-excírculo con $BC$ y $A$ están alineados.

Pese a su sencillez, el uso de este resultado es frecuente. Por un argumento análogo, $A$, $D$ y $T'$, el antípoda de $T$ en el $A$-excírculo, están sobre la misma recta. Otro hecho de idéntica utilidad es el siguiente.

**Lema 4.**

Los puntos de tangencia del incírculo y $A$-excírculo con $BC$ son simétricos respecto al punto medio de este lado, es decir $BD = EC$.

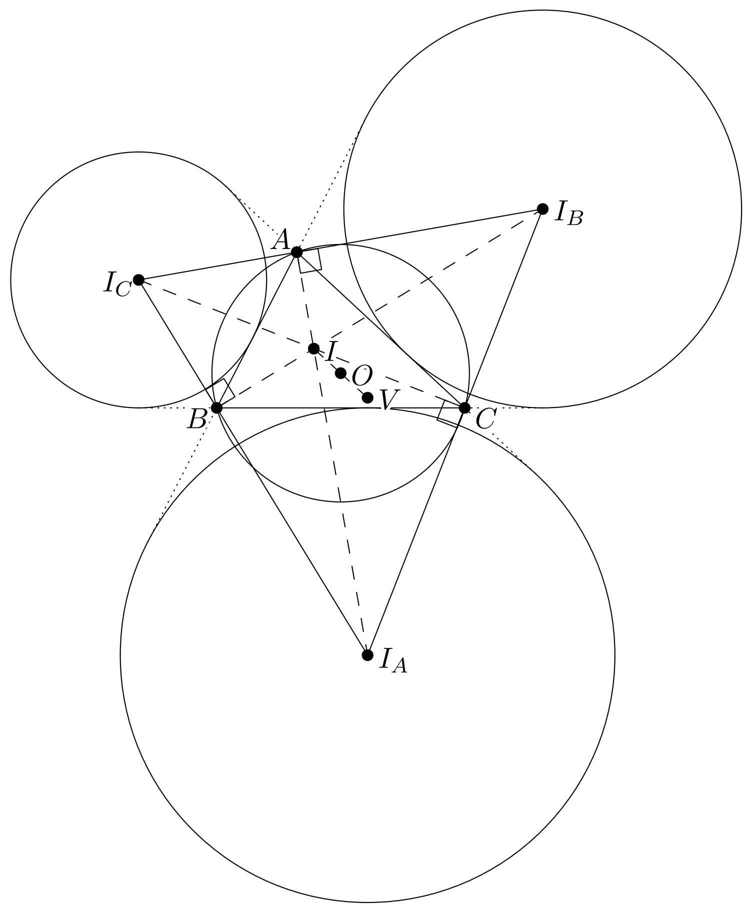


**Figura 15.** Los tres excírculos del triángulo $ABC$.

El ejemplo más evidente donde se usan estos lemas es el problema 6 de la IMO 2008, que resolvemos en el capítulo de homotecia.

*Prueba.* Definamos a $P$ y $Q$ como los puntos de tangencia del $A$-excírculo con $AB$ y $AC$, respectivamente. Como es usual, denotemos por $a,\ b,\ c$ y $s$ las longitudes de $BC,\ CA,\ AB$ y el semiperímetro de $\triangle ABC$. Observemos que

$$AP + AQ = AB + BP + AC + CQ = AB + BE + EC + AC = AB + BC + CA = 2s$$

así que $AP = AQ = s$. Por consiguiente $CT = CQ = AQ - AC = s - b$, pero

$$BD = AB + BC - BD - AF - CD = a + c - s = 2s - b - s = s - b$$

como requeríamos. □

Cuando dos puntos son simétricos respecto al punto medio de un lado del triángulo, diremos que son *puntos isotómicos*. En este caso, $D$ y $T$ son isotómicos.
La configuración completa de $\triangle ABC$ y sus excírculos es mostrada en la figura 15. El triángulo formado por $I_A,\ I_B$ e $I_C$ es el triángulo *excentral* de $\triangle ABC$. Notemos que, para $\triangle I_AI_BI_C$, el incentro de $\triangle ABC$ es su ortocentro, el circuncírculo de $\triangle ABC$ es su círculo de los nueve puntos y el circuncentro de $\triangle ABC$ es su correspondiente centro de los nueve puntos. Esto quiere decir que el simétrico de $I$ con respecto a $O$, digamos $V$, es el circuncentro de $\triangle I_AI_BI_C$. A este punto se le conoce como el *punto de Bevan* de $\triangle ABC$.

## 5.2 Los puntos de Gergonne y Nagel

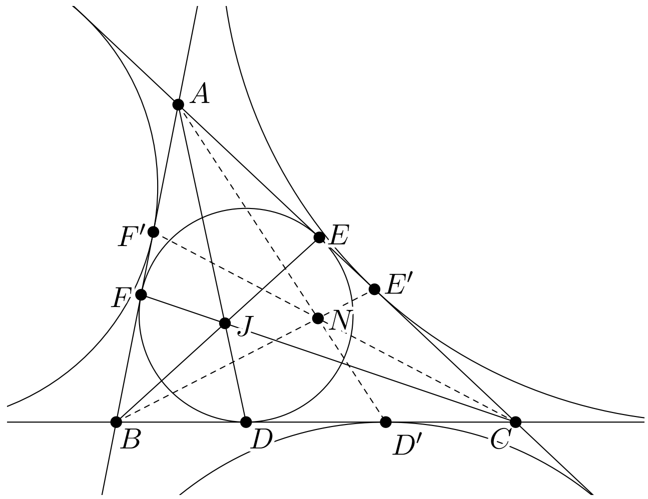


**Figura 16.** Los puntos de Gergonne y Nagel del triángulo $ABC$.

La configuración incírculo-excírculos guarda dos concurrencias que hasta ahora no habíamos considerado.

**Definición 11.**

El *punto de Gergonne* es el punto de concurrencia de los segmentos que unen cada vértice de $\triangle ABC$ con el punto de tangencia del incírculo y el lado opuesto correspondiente.

En nuestro caso, las rectas $AD$, $BE$ y $CF$ se cortan en el mismo punto $J$, el punto de Gergonne de $\triangle ABC$.

**Definición 12.**

El *punto de Nagel* corresponde al punto de intersección de los segmentos que unen cada vértice de $\triangle ABC$ con el punto de tangencia del excírculo y el lado opuestos a ese vértice.

En efecto, el punto de Nagel de $\triangle ABC$ está dado por $N$, el punto de corte de $AD'$, $BE'$ y $CF'$, como se muestra en la figura 16.
Por ahora, tomaremos estas concurrencias como ciertas. Como $BD = BF$, $AF = AE$ y $CE = CD$, por el teorema de Ceva (que estudiaremos más adelante), la prueba de la intersección común de $AD$, $BE$ y $CF'$ es simple. Como los puntos de tangencia del incírculo y el excírculo correspondiente a un lado son isotómicos según el lema 4, este mismo teorema asegura la concurrencia de $AD'$, $BE'$ y $CF'$. De hecho, el lema recién utilizado implica que los puntos de Nagel y Gergonne son *conjugados isotómicos* de $\triangle ABC$.
El punto de Nagel está involucrado en una colinealidad especial.

**Proposición 15** (Recta de Nagel)**.**

El incentro $I$, el baricentro $G$ y el punto de Nagel $N$ del triángulo $ABC$ yacen sobre una misma recta, llamada *recta de Nagel* de $\triangle ABC$. Además, $G$ divide al segmento $NI$ en la razón $2:1$.

*Prueba.* Consideremos la figura 17. Definamos a $L$ como el punto medio de $\overline{BC}$ y $R$ el antípoda de $D$ en el incírculo de $\triangle ABC$.
De acuerdo con el lema 3, $A$, $R$ y $D'$ están alineados. Nótese que $\overline{IL}$ es base media respecto a $RD'$, así que $LI \parallel D'A$, pero $AG = 2GL$, entonces si $N' = \overline{IG} \cap \overline{AD'}$ tenemos que $GN' = 2IG$. Un punto $N'$ con esta propiedad se define de manera única, así que también debe estar sobre $BE'$ y $CF'$, por tanto $N = N'$. $\square$

Por la proposición 15, es claro que $AN = 2IL = RD'$, así que $AR = ND'$. Este resultado es básicamente el problema 2 de la Olimpiada Matemática de Estados Unidos (USAMO por sus siglas en inglés) de 2001.

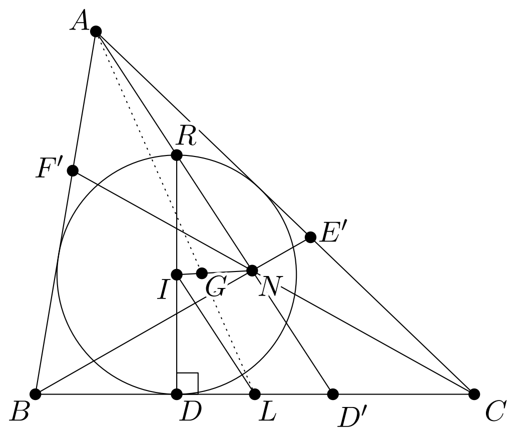


**Figura 17.** La recta de Nagel de $\triangle ABC$.

### 5.3 Dos lemas adicionales

Continuemos considerando a $D$, $E$ y $F$ como los puntos de tangencia del incírculo con los lados $BC$, $CA$ y $AB$ de un triángulo $ABC$. Tomemos a $M$ como el punto medio de $\overline{BC}$. Tenemos la siguiente relación especial:

**Lema 5.**

Las rectas $EF$, $DI$ y $AM$ son concurrentes.

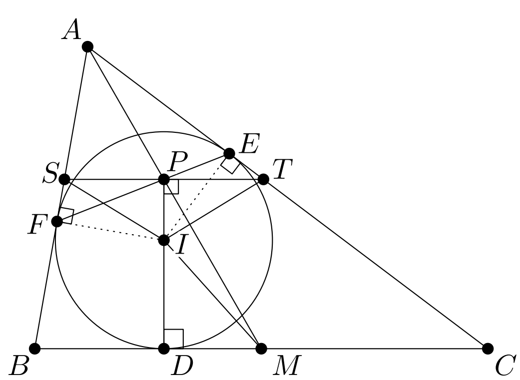


**Figura 18.** Una concurrencia extra que involucra la $A$-mediana.

*Prueba.* Sea $P = \overline{AM} \cap \overline{DI}$. Los puntos $S$ y $T$ están sobre $AB$ y $AC$, respectivamente, tales que $ST$ pasa por $P$ y $ST \parallel BC$. De esta forma, $P$ es el punto medio de $\overline{ST}$ y $\angle IPT = 90°$, así que $\triangle SIT$ es isósceles con $IS = IT$. Como $IF = IE$ y $\angle IFS = \angle IET = 90°$, se sigue que $\triangle IFS \cong \triangle IET$. Además, los cuadriláteros $IPSF$ e $ITEP$ son cíclicos, por consiguiente

$$\angle ITE = \angle ISF = \angle IPF$$

luego, $F$, $P$ y $E$ deben estar alineados. □

El segundo hecho concierne a una perpendicularidad y concurrencia que suelen estar ocultas en los problemas.

**Lema 6.**

La recta $EF$, la bisectriz interna de $\angle B$ y la base media respecto al lado $AB$ son concurrentes en un punto $P$. Es más, $\angle BPC = 90°$.

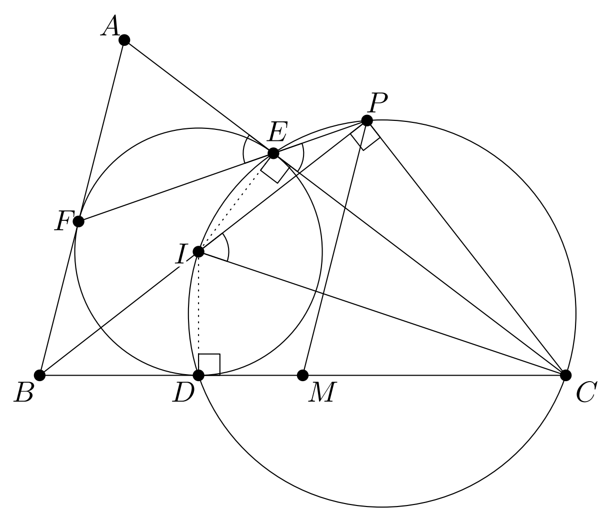


**Figura 19.** Perpendiculares ocultas.

*Prueba.* Tomemos a $P$ como la intersección de $EF$ y $BI$. Primero probaremos la perpendicularidad. En términos de ángulos dirigidos, observemos que

$$\measuredangle CIP = \measuredangle CBI + \measuredangle ICB = 90° - \measuredangle IAC = \measuredangle AEF = \measuredangle CEP$$

lo que implica que $E$ y $P$ yacen sobre la circunferencia de diámetro $\overline{CI}$, que también contiene a $D$. Por su parte, como $P$ también está sobre la circunferencia de diámetro $\overline{BC}$, extraemos que

$$\angle BPM = \angle CBP = \angle PBA$$

por ende $PM \parallel AB$ y por tanto es la recta que une los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. □

¡Es hora de un ejemplo!

**Ejemplo 5.**

(EE.UU. 2015, Selectivo IMO, P1) Sea $ABC$ un triángulo escaleno con incentro $I$ cuyo incírculo es tangente a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ en $D$, $E$ y $F$, respectivamente. Denote por $M$ el punto medio de $\overline{BC}$. Sea $Q$ un punto sobre el incírculo tal que $\angle AQD = 90°$. Sea $P$ un punto dentro del triángulo sobre la recta $AI$ tal que $MD = MP$. Probar que $\angle PQE = 90°$ o bien $\angle PQF = 90°$.

*Solución.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AC > AB$. Probaremos que $\angle PQE = 90°$.
Sea $K$ el antípoda de $D$ en el incírculo, y $D'$ el simétrico de $D$ respecto a $M$. Tenemos que $\angle KQD = \angle AQD = 90°$. Además, $A$, $K$ y $D'$ son colineales por los lemas 3 y 4. Concluimos que $A$, $Q$ y $D'$ están alineados. Como $\angle DQD' = 90°$ y $MP = MD$, se infiere que $DPQD'$ es un cuadrilátero cíclico con centro $M$ y diámetro $DD'$.
Sea $P' = \overline{AI} \cap \overline{ED}$. Por el lema 6, sabemos que $MP' \parallel AC$. Como $\triangle ECD$ es isósceles en $C$, el paralelismo anterior implica que $\triangle P'MD$ también lo es en $M$, así que $P = P'$.
Finalmente, ya que $ID \perp DM$ deducimos que $ID$ es tangente a $(DPQD')$, por tanto

$$\angle EQA = \angle EQK = \angle EDK = \angle PQD$$

luego, $\angle EQP = \angle AQD = 90°$, como requeríamos. □

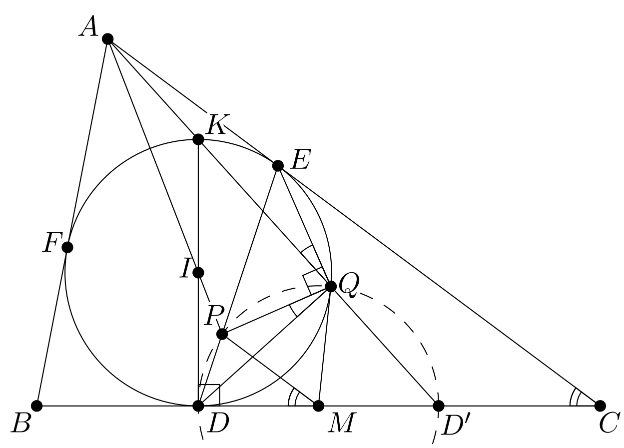


**Figura 20.** Primer problema del Selectivo IMO 2015 de EE.UU.

## 6. Problemas propuestos

**Problema 1.** (Iberoamericana 2011, P4) Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con $AC \neq BC$ y sea$O$ su circuncentro. Sean $P$ y $Q$ puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que $Q$ es el ortocentro de $ABC$.

**Problema 2.** Sea $G$ el baricentro del triángulo $ABC$, y sean $M$, $N$ y $P$ los baricentros de los triángulos $BGC$, $CGA$ y $AGB$, respectivamente. Demuestra que el triángulo $MNP$ es semejante al triángulo $ABC$.

**Problema 3.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sean $I_A$, $I_B$, $I_C$ e $I_D$ los incentros de los triángulos $BCD$, $CDA$, $DAB$ y $ABC$, respectivamente. Demostrar que $I_AI_BI_CI_D$ es un rectángulo.

**Problema 4.** (Centroamericana 2020, P4) Considere un triángulo $ABC$ con $BC > AC$. El círculo con centro $C$ y radio $AC$ corta al segmento $BC$ en $D$. Sea $I$ el incentro del triángulo $ABC$ y $\Gamma$ el círculo que pasa por $I$ y es tangente a la recta $CA$ en $A$. La recta $AB$ y $\Gamma$ se cortan en un punto$F$ con $F \neq A$. Probar que $BF = BD$.

**Problema 5.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con $\angle BAC = 60°$. Probar que $IH = IO$, donde $I$, $H$ y $O$ son el incentro, ortocentro y circuncentro de $ABC$, respectivamente.

**Problema 6.** Sean $AD$, $BE$ y $CF$ las alturas de un triángulo acutángulo $ABC$ y sea $H$ su ortocentro. Sea $N$ el punto medio de $AH$ y sea $M$ el punto medio de $BC$. Probar que $NM$ es perpendicular a $FE$.

**Problema 7.** (Centroamericana 2019, P4) Sea $ABC$ un triángulo, $\Gamma$ su circuncírculo y $\ell$ la tangente a $\Gamma$ que pasa por $A$. Las alturas desde $B$ y $C$ se prolongan y cortan a $\ell$ en $D$ y $E$, respectivamente. Las rectas $DC$ y $EB$ cortan a $\Gamma$ nuevamente en $P$ y $Q$, respectivamente. Demostrar que el triángulo $APQ$ es isósceles.

**Problema 8.** (Iraní de Geometría 2021, Nivel Intermedio, P1) Sea $ABC$ un triángulo con $AB = AC$. Sea $H$ el ortocentro de $ABC$. El punto $E$ es el punto medio de $AC$ y el punto $D$ yace sobre el lado $BC$ tal que $3CD = BC$. Probar que $BE \perp HD$.

**Problema 9.** Sea $AD$ la altura desde $A$ en el triángulo $ABC$. Sean $X$ e $Y$ los puntos medios de las otras dos alturas, $H$ el ortocentro y $M$ el punto medio de $BC$. Demostrar que:

- El circuncírculo de $DXY$ pasa por $H$ y por $M$; y,
- Los triángulos $ABC$ y $DXY$ son semejantes.

**Problema 10.** (Hong Kong 2020, 2do Selectivo IMO, P1) Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con incentro $I$ y ortocentro $H$. La recta $AI$ corta al circuncírculo de $ABC$ por segunda vez en $M$. Suponga que el segmento $IM$ es igual en longitud al circunradio de $ABC$. Probar que $AH \geq AI$.

**Problema 11.** (Panafricana 2017, P6) Sea $ABC$ un triángulo y $H$ su ortocentro. El círculo de diámetro $AC$ corta al circuncírculo de $ABH$ por segunda vez en $K$. Probar que la intersección de las rectas $CK$ y $BH$ es el punto medio del segmento $BH$.

**Problema 12.** (Cuenca del Pacífico 2017, P2, Ricardo Largaespada) Sea $ABC$ un triángulo con $AB < AC$. Sea $D$ el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo $BAC$ y el circuncírculo de $ABC$. Sea $Z$ el punto de intersección de la mediatriz de $AC$ con la bisectriz exterior del ángulo $BAC$. Probar que el punto medio del segmento $AB$ yace sobre el circuncírculo de $ADZ$.

**Problema 13.** (Cuenca del Pacífico 2012, P1) Sea $P$ un punto en el interior del triángulo $ABC$, y sean $D$, $E$ y $F$ los puntos de intersección de la recta $AP$ y el lado $CA$, el de la recta $BP$ y el lado $CA$, y el de la recta $CP$ y el lado $AB$, respectivamente. Probar que el area del triángulo $ABC$ debe ser 6 si el área de cada uno de los triángulos $PFA$, $PDB$ y $PEC$ es 1.

**Problema 14.** (Centroamericana 2019, P3) Sea $ABC$ un triángulo y $\Gamma$ su circuncírculo. Sea $D$ el pie de altura desde $A$ al lado $BC$, $M$ y $N$ los puntos medios de $AB$ y $AC$, y $Q$ el punto en $\Gamma$ diametralmente opuesto a $A$. Sea $E$ el punto medio de $DQ$. Demostrar que las perpendiculares a $EM$ y $EN$ que pasan por $M$ y$N$, respectivamente, se cortan sobre $AD$.

**Problema 15.** (Centroamericana 2016, P6) Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro $I$ y circuncírculo $\Gamma$. Sea $M = BI \cap \Gamma$ y $N = CI \cap \Gamma$. La recta paralela a $MN$ por $I$ corta a $AB$ y $AC$ en $P$ y $Q$, respectivamente. Probar que los circunradios de $\triangle BNP$ y $\triangle CMQ$ son congruentes.

## 6.1 Problema reto

**Problema 16.** (Sharygin 2016, Ronda de Correspondencia, P22) Sean $M_A$, $M_B$ y $M_C$ los puntos medios de los lados de un triángulo no isósceles $ABC$. Los puntos $H_A$, $H_B$, $H_C$ yacen en los lados correspondientes, diferentes de $M_A$, $M_B$, $M_C$, y satisfacen que $M_AH_B = M_AH_C$, $M_BH_A = M_BH_C$ y $M_CH_A = M_CH_B$. Probar que $H_A$, $H_B$ y $H_C$ son los pies de las alturas del triángulo $ABC$.

**Problema 17.** (EE. UU. 2015, Selectivo para el Selectivo IMO, P2) Sea $ABC$ un triángulo escaleno. Sean $K_a$, $L_a$ y $M_a$ las intersecciones respectivas de $BC$ con la bisectriz interna, bisectriz externa y mediana desde $A$. El circuncírculo de $AK_aL_a$ interseca a $AM_a$ por segunda vez en $X_a$, diferente de $A$. Defina $X_b$ y $X_c$ de forma análoga. Probar que el circuncentro de $X_aX_bX_c$ yace sobre la recta de Euler de $ABC$.